使用 TI-Nspire 解答与研究全国高考理科数学

2013

-

1.(2013 安徽 · 13 · 5 分)

已知直线 $y=a$ 交抛物线 $y=x^2$ 于 A、B 两点.若该抛物线上存在点 C，使得∠ACB 为直角，则 a 的取值范围为________.

■ 某学生的解答投影

$\because y=x^2$, $y=a$

设 $A(\sqrt{a},a)$, $B(-\sqrt{a},a)$, $C(m,m^2)$

此时满足 A.B.C 在抛物线上，AB 在 $y=a$ 上

$\therefore \overrightarrow{AC}=(m-\sqrt{a},\ m^2-a)$

$\overrightarrow{BC}=(m+\sqrt{a},\ m^2-a)$

又 $\because$ ∠ACB 为直角

$\therefore \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

即 $(m^2-a)+(m^2-a)^2=(m^2-a)(m^2-a+1)=0$

C 不在 $y=a$ 上，即 $m^2\neq a$

$\therefore m^2-a+1=0$

$\therefore a=m^2+1$, $m\in R$

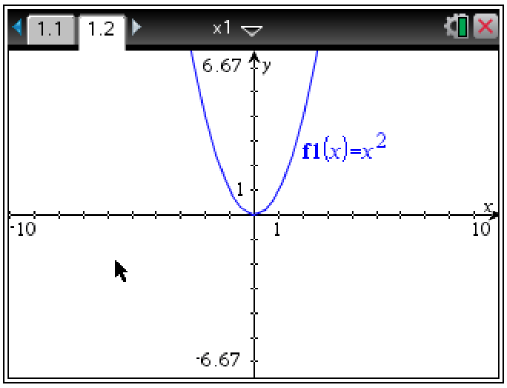
$\therefore a\geq 1$, $m=0$ 时取"="

$\therefore a\in[1,+\infty)$

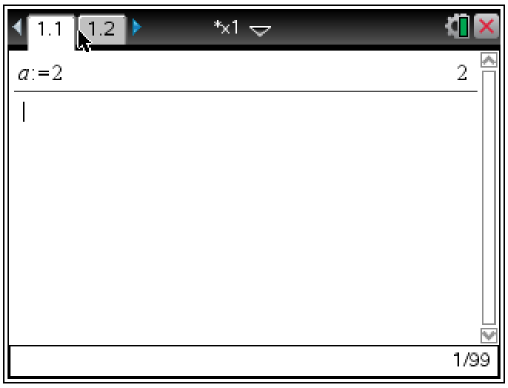
■ 使用 TI-Nspire 技术的解答与研究

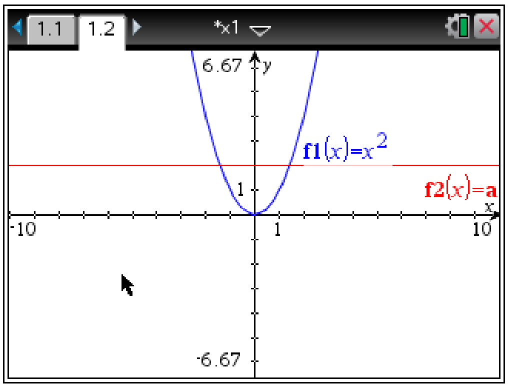
取值范围的题目向来难度非常大，下面 Nspire 图形计算器进行研究。

S_1 绘制两函数，此时因为参数 a 不定，所以图象上没有显现出来（真实情况是定义了的）

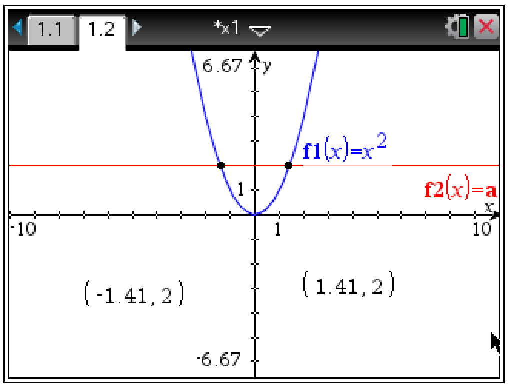


S_2 任对参数 a 赋值



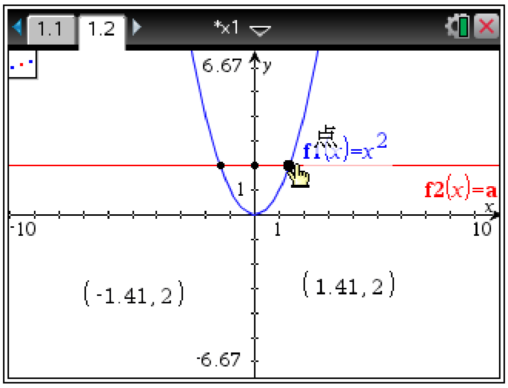


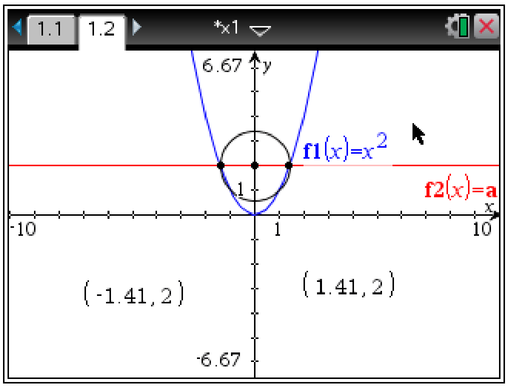
S_3 使用交点工具计算两交点



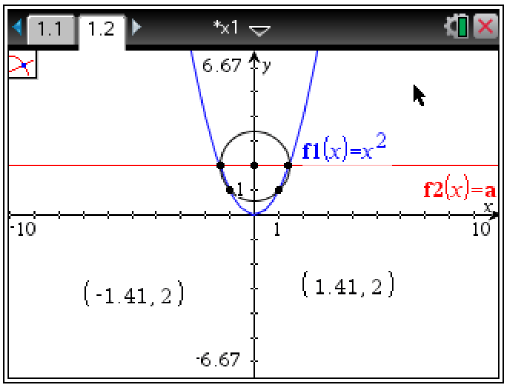
S_4 由于存在点 C，使得∠ACB 为直角，于是以 AB 为直径作圆，直径对的圆周角是直角。

已知直径作圆的技巧是，先计算出中点，然后找到半径以作圆

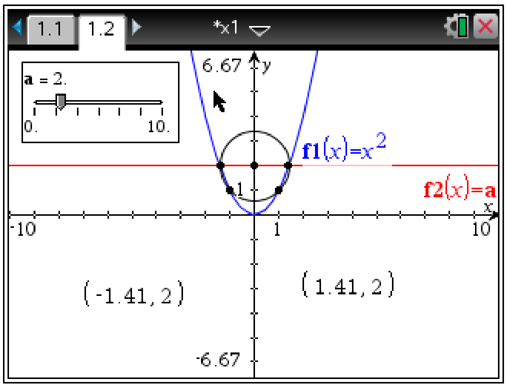




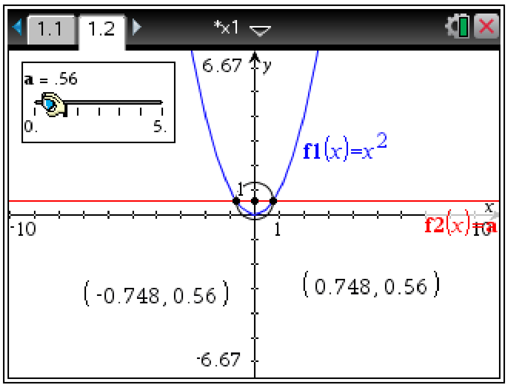
S_5 下面计算圆与抛物线的交点

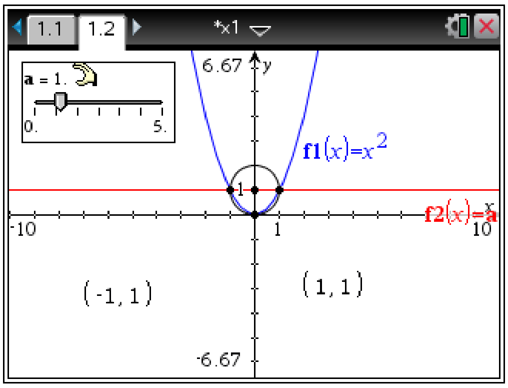


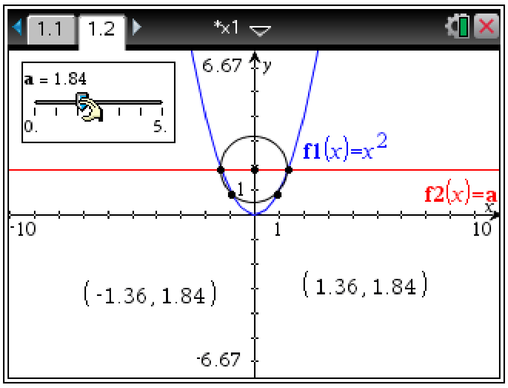
S_6 下面我们对参数 a 插入游标



S_7 拖动游标，观察交点情况，如果有不少于 3 个交点，则交点（不含直径端点）即是符合题意的点



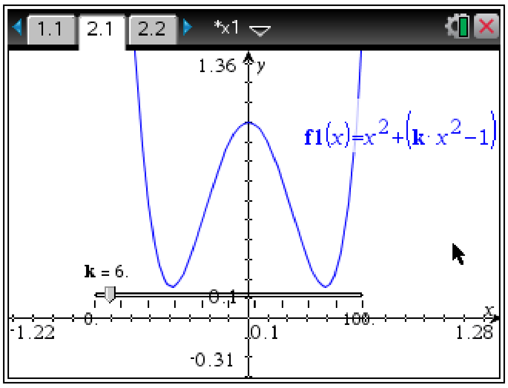




发现当$a \geq 1$时，符合题意，于是 a 的范围为$[1,\infty)$

■ 换个思路继续研究下去，如果 a=1，那么是否存在一个系数 k，使得圆与抛物线只有一个交点？于是采用如下操作步骤。

S_1 代入表达式，作差，观察根的个数。



S_2 发现 k 值增大，总是没有交点，我们要研究当 k 无限增大时函数的最小值。于是求导算出最小值，然后计算当 k 无限增大时，最小值的极限。算出极限为 0。于是可以知道，无论 k 取什么值，总是有 3 个交点。

DelVar k 完成

$\frac{d}{dx}(f1(x))$ $\quad 4\cdot k^2\cdot x^3-2\cdot(2\cdot k-1)\cdot x$

solve$(4\cdot k^2\cdot x^3-2\cdot(2\cdot k-1)\cdot x=0,x)$

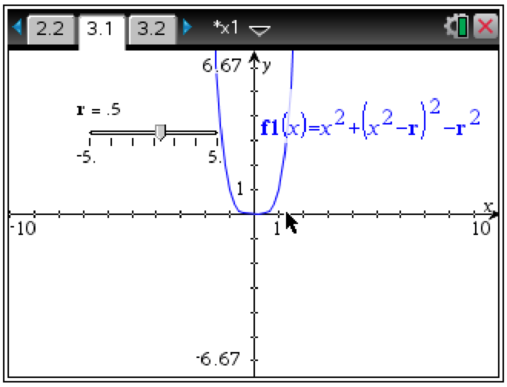
$x=\frac{\sqrt{2\cdot(2\cdot k-1)}}{2\cdot k}$ and $\frac{2\cdot k-1}{k^2}\geq 0$ or $x=\frac{-\sqrt{2\cdot(2\cdot k-1)}}{2\cdot k}$ and $\frac{2\cdot k-1}{k^2}\geq 0$ or $x=0$

$f1\left(\frac{\sqrt{2\cdot(2\cdot k-1)}}{2\cdot k}\right)$ $\quad \frac{4\cdot k-1}{4\cdot k^2}$

$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{4\cdot k-1}{4\cdot k^2}\right)$ $\quad 0$

■ 那么，如果抛物线前面的系数给定，圆的半径改变，是否仍然总有 3 个交点？于是不妨设系数 k 为 1，研究圆的半径 r。

S_1 同理作差，对变量 r 插入游标研究。



S_2 调整游标，发现 r=0.5 是使得方程只有一个根的最大值。

S_3 事实上，曲率的倒数就是曲率半径。平面曲线的曲率就是针对曲线上某个点的切线方向角对弧长的转动率，通过微分来定义，表明曲线偏离直线的程度。曲率半径主要是用来描述曲线上某处曲线弯曲变化的程度。特殊的如：圆上各个地方的弯曲程度都是一样的。而曲率半径就是它自己的半径；直线不弯曲 ，所以曲率 0，0 没有倒数,所以直线没有曲率半径。圆形越大，弯曲程度就越小，也就越近似一条直线。所以说，圆越大曲率越小，曲率越小，曲率半径也就越大。如果在某条曲线上的某个点可以找到一个相对的圆形跟他有相等的曲率，那么曲线上这个点的曲率半径就是该圆形的半径。也可以这样理解：就是把那一段曲线尽可能的微分，直到最后近似一个圆弧，这个圆弧对应的半径即曲线上这个点的曲率半径。

S_4 下面证明曲率半径公式。

$$\mathrm{ds}=\mathrm{d}\left(\int\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,\mathrm{dx}\right)$$

$$\mathrm{d}\theta=\mathrm{d}\left(\arctan\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}\right)}{1+\left(\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}\right)^2}$$

$$p=\frac{ds}{d\theta}=\frac{\left(1+\frac{dy}{dx}^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

S_5 回到原本我们研究的这个题，$\mathrm{y}=\mathrm{x}^2$,那么直接就可以由上面的公式得出曲率半径为$\frac{1}{2}$

2.（2013 新课标 II • 10 • 5 分）

已知函数$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，下面结论错误的是（　　）

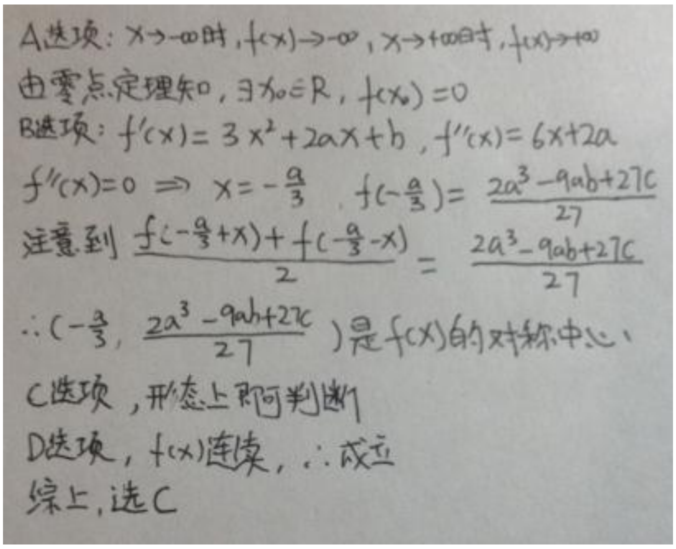
A.$\exists x_0\in R, f(x_0)=0$

B.函数 y=f(x)是中心对称的图形

C.若x_0是 f(x)的极小值点，则 f(x)在区间$(-\infty,x_0)$单调递减

D.若x_0是 f(x)的极值点，则 $f'(x_0)=0$

■　某学生的解答投影


A选项：$x\to-\infty$时，$f(x)\to-\infty$，$x\to+\infty$时，$f(x)\to+\infty$

由零点定理知，$\exists x_0\in R$，$f(x_0)=0$

B选项：$f'(x)=3x^2+2ax+b$，$f''(x)=6x+2a$

$f''(x)=0 \Rightarrow x=-\frac{a}{3}$　$f(-\frac{a}{3})=\frac{2a^3-9ab+27c}{27}$

注意到 $\frac{f(-\frac{a}{3}+x)+f(-\frac{a}{3}-x)}{2}=\frac{2a^3-9ab+27c}{27}$

$\therefore(-\frac{a}{3},\frac{2a^3-9ab+27c}{27})$是f(x)的对称中心，

C选项，形态上即可判断

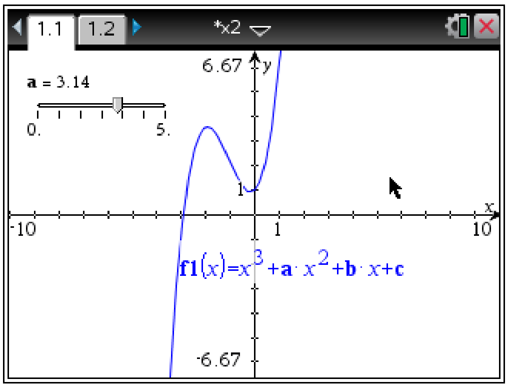
D选项，f(x)连续，∴成立

综上，选C

■　使用 TI-Nspire 技术的解答与研究

A 选项显然正确。对于 B 选项，若 a=0，由奇函数与平移可知显然成立，若 a 不为 0 呢？

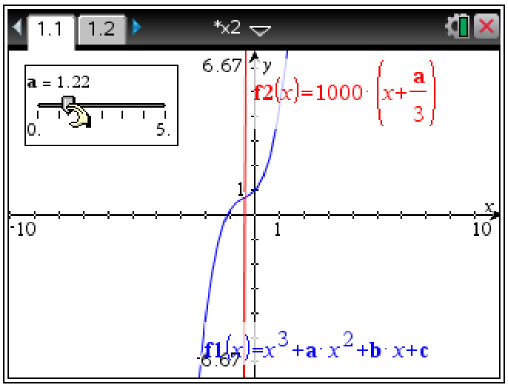
S_1 由于探究二次项是否影响中心对称的影响，不妨设 b=c=1，插入游标。

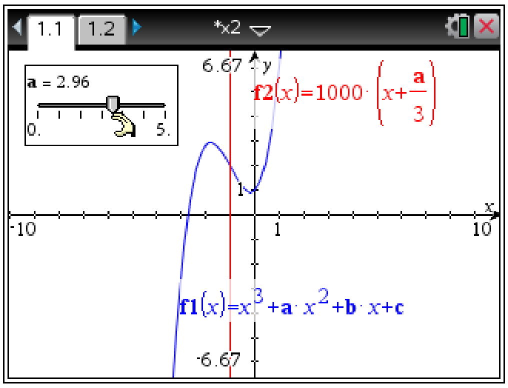


由形态上好像是具有对称中心一样，似乎是在两极值坐标点的中点。若按导函数有两个零点、有一个零点、没有零点来分治讨论的话，过于繁琐。注意到似乎在对称中心的位置导函数取到最小值。于是重新研究，$f'(x)=3x^2+2ax+b$，开口向上

当$x=-\frac{a}{3}$时取到最小值。

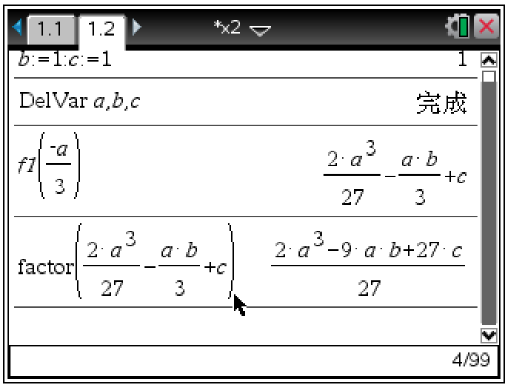
S_2 做直线$x=-\frac{a}{3}$，移动游标观察。





注意到无论 k 取什么值，两图线交点似乎总是对称中心。

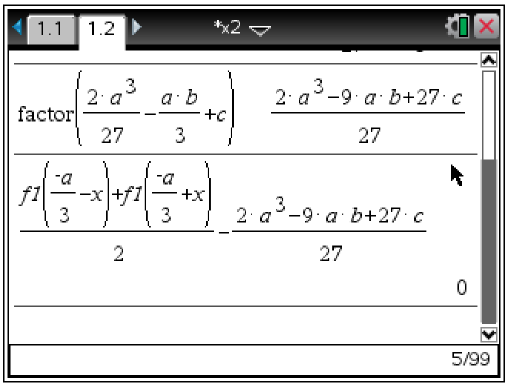
S_3 计算出这个交点。



于是猜想$(-\frac{a}{3},\frac{2a^3-9ab+27c}{27})$就是其对称中心。

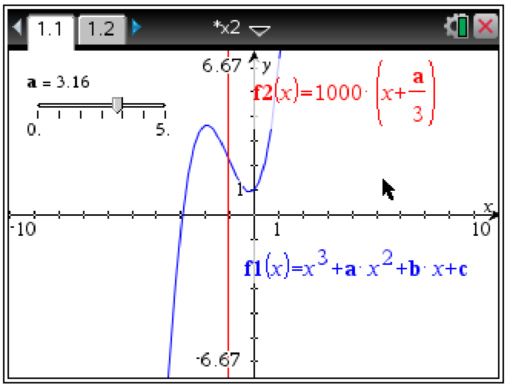
由对称中心的定义，若(a, b)是对称中心，$\frac{f(a-x)+f(a+x)}{2}=b$恒成立

S_4 验证等式是否恒成立。



成立。从而$(-\frac{a}{3},\frac{2a^3-9ab+27c}{27})$就是其对称中心。选项 B 正确。

对于 C 选项，数形结合显然不成立。

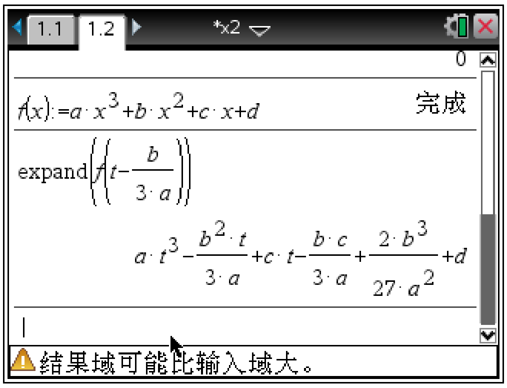


对于 D 选项，因为函数连续，所以一定成立。

综上，选 C 选项。

■ 换个角度思考下去，任意三次函数都有对称中心吗？

S_1 对于任意三次函数$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$，令$t = x + \frac{b}{3a}$



最后 f(t)关于 t 的二次项立刻消失，所以是可以得出，任意三次函数的图线均是中心对称图形。

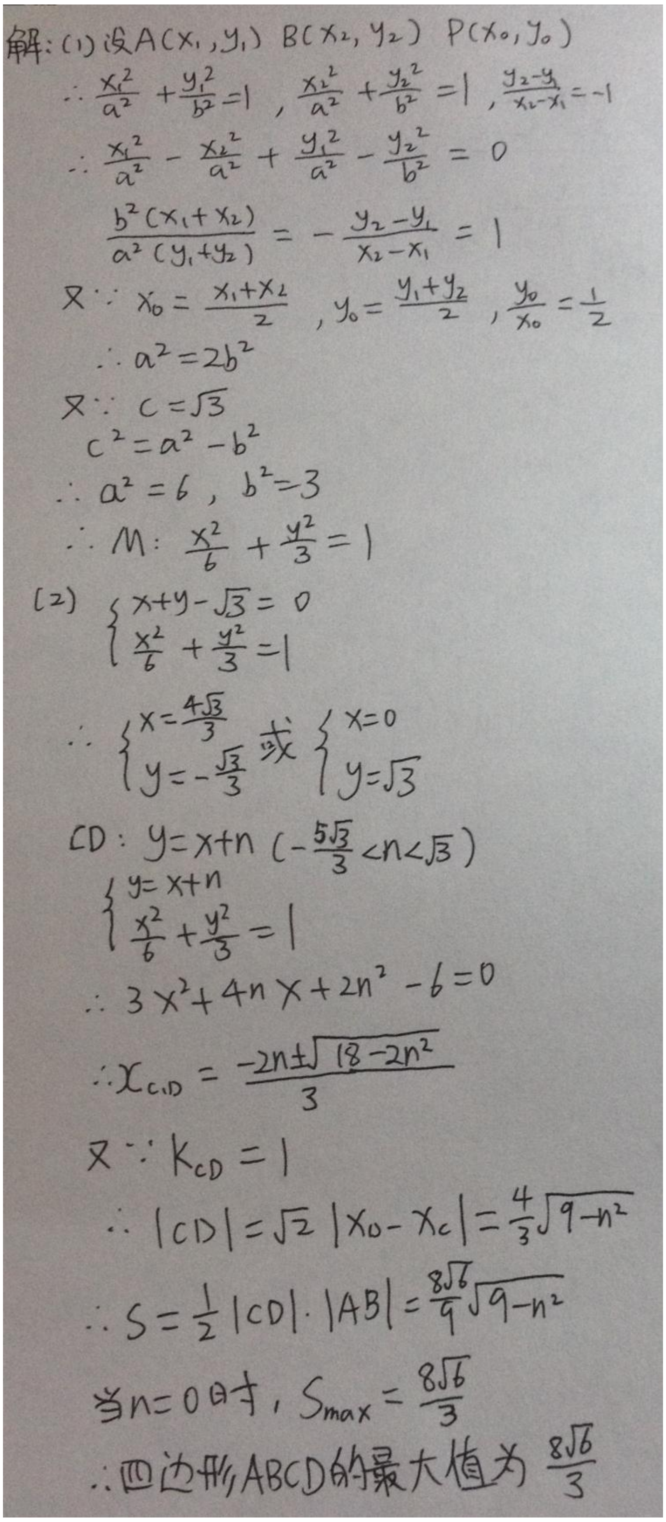
3.（2013 新课标 II・20・12 分）

平面直角坐标系 xoy 中，过椭圆 M：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,(a>b>0)$右焦点的直线$x+y-\sqrt{3}=0$交 M 于 AB 两点，P 为 AB 中点，且 OP 的斜率为$\frac{1}{2}$

（I）求 M 的方程

（II）C、D 为 M 上的两点，若四边形 ACBD 对角线 CD⊥AB，求四边形 ACBD 面积的最大值。

■　某学生的解答投影



解：(1) 设 $A(x_1,y_1)$ $B(x_2,y_2)$ $P(x_0,y_0)$

$\therefore \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$，$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1$，$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-1$

$\therefore \frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=0$

$\frac{b^2(x_1+x_2)}{a^2(y_1+y_2)}=-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=1$

又∵ $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$，$y_0=\frac{y_1+y_2}{2}$，$\frac{y_0}{x_0}=\frac{1}{2}$

$\therefore a^2=2b^2$

又∵ $c=\sqrt{3}$

$c^2=a^2-b^2$

$\therefore a^2=6$，$b^2=3$

$\therefore M: \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$

(2) $\begin{cases} x+y-\sqrt{3}=0 \\ \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} x=\frac{4\sqrt{3}}{3} \\ y=-\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=0 \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$

$CD: y=x+n \ (-\frac{5\sqrt{3}}{3}<n<\sqrt{3})$

$\begin{cases} y=x+n \\ \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$

$\therefore 3x^2+4nx+2n^2-6=0$

$\therefore x_{C,D}=\frac{-2n\pm\sqrt{18-2n^2}}{3}$

又∵ $k_{CD}=1$

$\therefore |CD|=\sqrt{2}\,|x_D-x_C|=\frac{4}{3}\sqrt{9-n^2}$

$\therefore S=\frac{1}{2}|CD|\cdot|AB|=\frac{8\sqrt{6}}{9}\sqrt{9-n^2}$

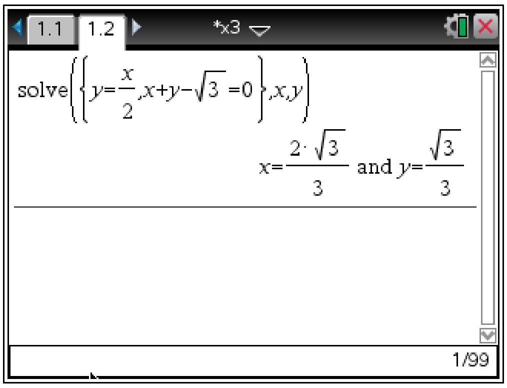
当$n=0$时，$S_{max}=\frac{8\sqrt{6}}{3}$

∴四边形ABCD的最大值为 $\frac{8\sqrt{6}}{3}$

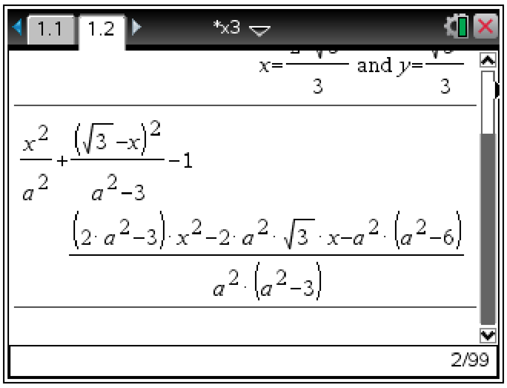
■　使用 TI-Nspire 技术的解答与研究

这道题作为新课标 II 的解析几何大题，有相当大的运算量，难度非常大。下面使用 Nspire 图形计算器进行研究。

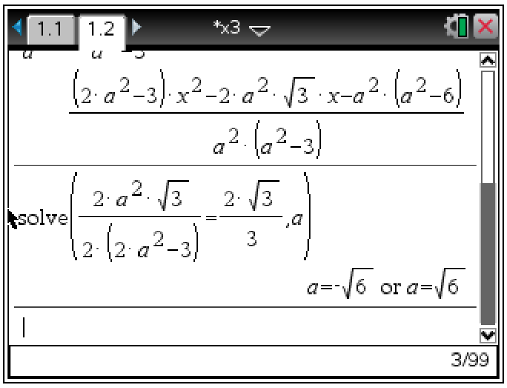
S_1　首先第一问直接判断 c=$\sqrt{3}$，联立两直线即可求出 P 点坐标。



S_2 由$c^2=3=a^2-b^2$，不妨设方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-3}=1$，联立$x+y-\sqrt{3}=0$，需满足两根和的一半为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$。



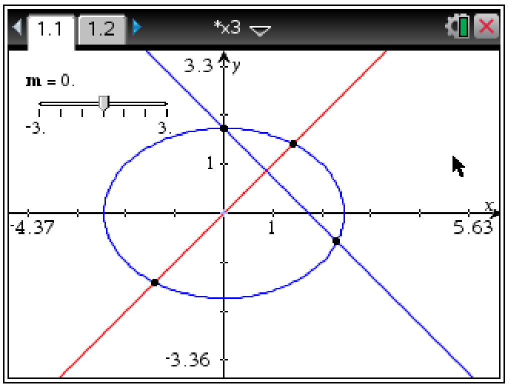
S_3 由韦达定理。

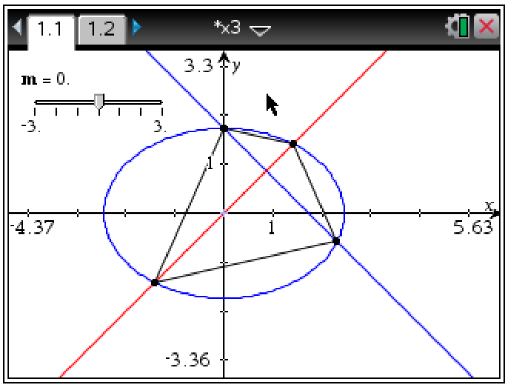


于是得到 M 方程为$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$。

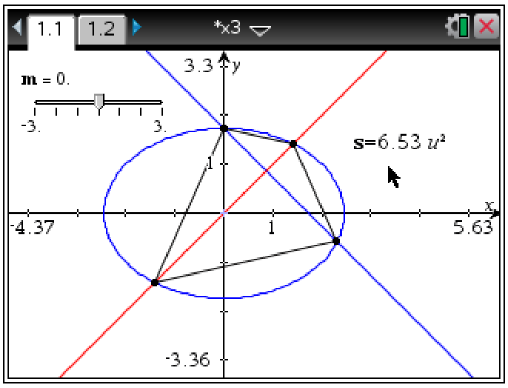
第二问运算量相当大，由于垂直，所以 CD 斜率为 AB 的负倒数，也就是 1。不妨设 CD 方程为$y=x+m$,下面我们利用 Nspire 强大的图形功能进行研究。

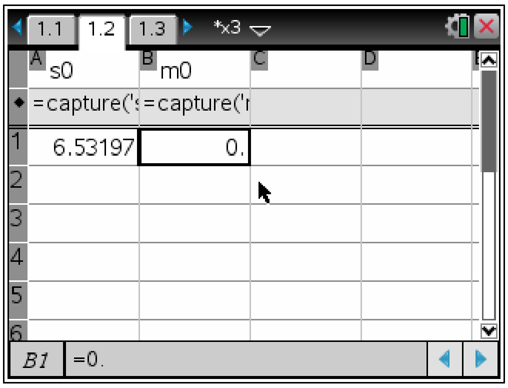
S_4 插入游标，使用求交点功能做出 A、B、C、D 四点，并且使用多边形功能做出四边形。



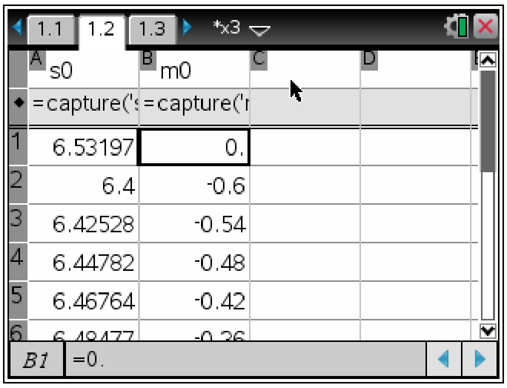


S_5 使用面积测量工具，测量这个多边形的面积，将测量结果存入变量 s 中，新建统计的 app，动态捕捉变量 s 与 m。

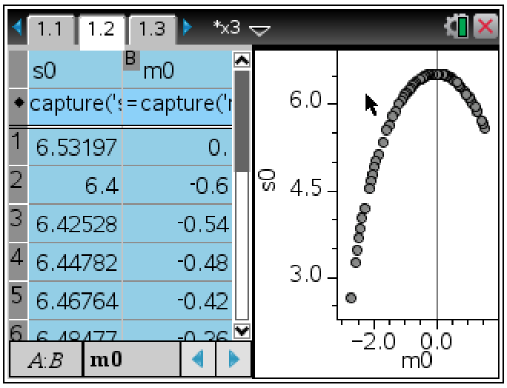




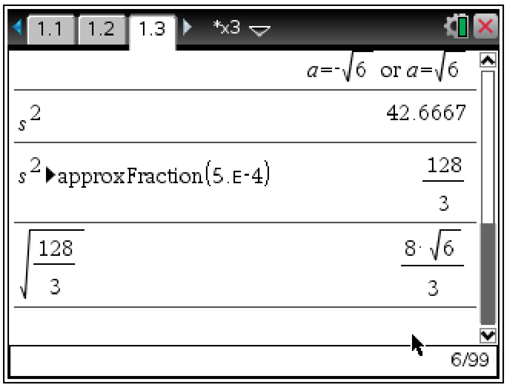
S_6 将游标来回拖动，获取一系列的面积 s 值与与之对应的 m 值。但需要注意题意，CD 为对角线，不可超出范围。



S_7 使用快速绘图功能，作出这一系列离散点的图线。



S_8 发现存在最大值，在 m=0 时取到。计算此时面积最大值。

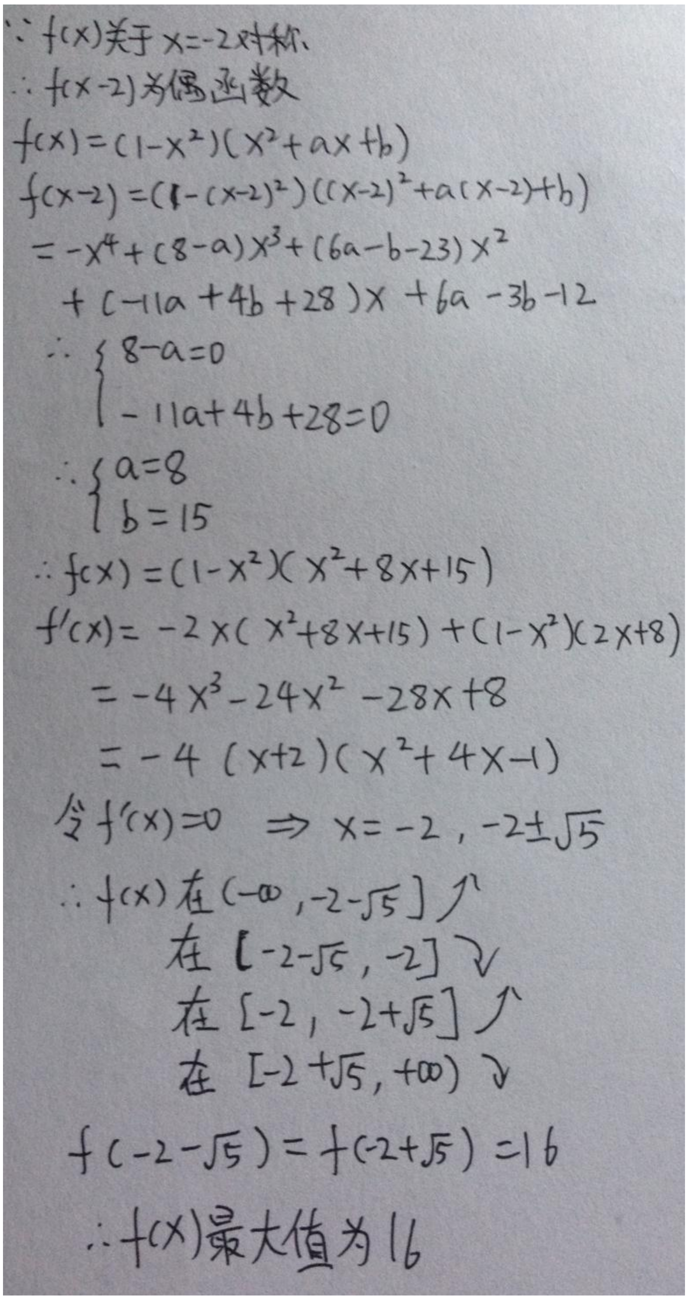


可得当 m=0 时，面积最大为$\frac{8\sqrt{6}}{3}$。

4.（2013 新课标 I • 16 • 5 分）

若函数$f(x)=(1-x^2)(x^2+ax+b)$的图象关于直线 x=-2 对称，则 f(x)的最大值为____________

■ 某学生的解答投影



$\because f(x)$关于$x=-2$对称,

$\therefore f(x-2)$为偶函数

$f(x)=(1-x^2)(x^2+ax+b)$

$f(x-2)=(1-(x-2)^2)((x-2)^2+a(x-2)+b)$

$=-x^4+(8-a)x^3+(6a-b-23)x^2$

$+(-11a+4b+28)x+6a-3b-12$

$\therefore \begin{cases} 8-a=0 \\ -11a+4b+28=0 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} a=8 \\ b=15 \end{cases}$

$\therefore f(x)=(1-x^2)(x^2+8x+15)$

$f'(x)=-2x(x^2+8x+15)+(1-x^2)(2x+8)$

$=-4x^3-24x^2-28x+8$

$=-4(x+2)(x^2+4x-1)$

令$f'(x)=0 \Rightarrow x=-2, -2\pm\sqrt5$

$\therefore f(x)$在$(-\infty,-2-\sqrt5]$ ↗

在$[-2-\sqrt5,-2]$ ↘

在$[-2,-2+\sqrt5]$ ↗

在$[-2+\sqrt5,+\infty)$ ↘

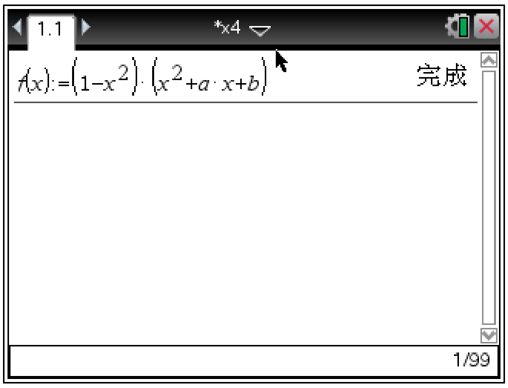
$f(-2-\sqrt5)=f(-2+\sqrt5)=16$

$\therefore f(x)$最大值为16

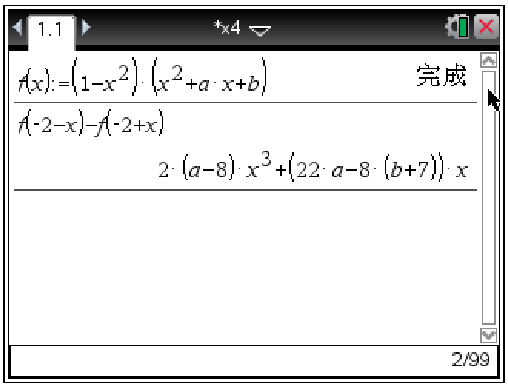
■ 使用 TI-Nspire 技术的解答与研究

此题放在了填空题最后一题的位置，难度非常大。下面用 Nspire 图形计算器强大的符号运算功能进行研究。

S_1 要研究函数性质，第一步显然要先定义函数 f(x)

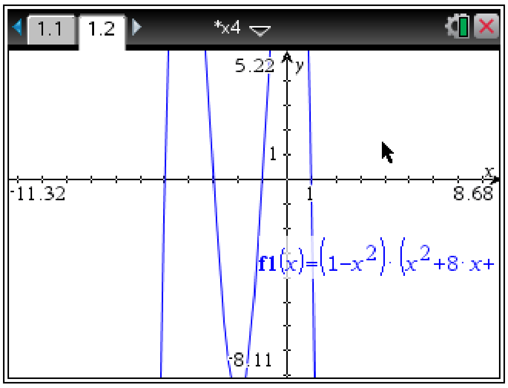


S_2 由对称性。

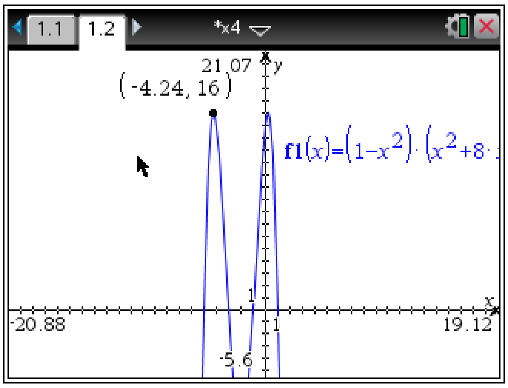


我们需要图中的表达式恒为 0，则系数必然均为 0，则显然 a=8，b=15

S_3 下面绘图。



S_4 最大值使用图线分析工具。

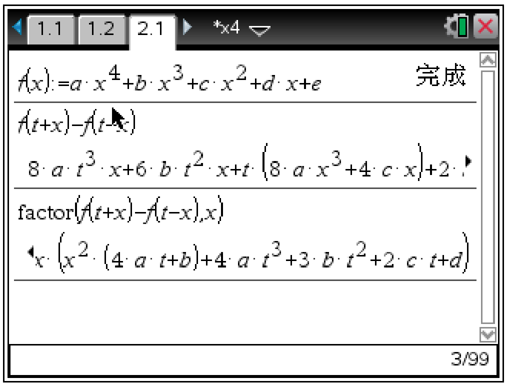


答案竟然就是此题的题号。所以最大值为 16。

■ 换个思路继续研究下去，四次函数是否都有一条对称轴？

于是我们借助Nspire图形计算器强大的代数运算功能，进行研究。

S_1 首先定义一个一般的四次函数，假设对称轴为 x=t,作差。



S_2 由此可见，这条对称轴即使有，也必须是$-\frac{b}{4a}$。令$t=-\frac{b}{4a}$,

代入，化简得$\Delta=8a^2d-4abc+b^3$，当△=0 时，才有对称轴。

5.（2013 四川・8・5 分）

从 1、3、5、7、9 这五个数中，每次取出两个不同的数分别记为 a、b，共可得到$\lg a-\lg b$的不同值的个数是(　　)

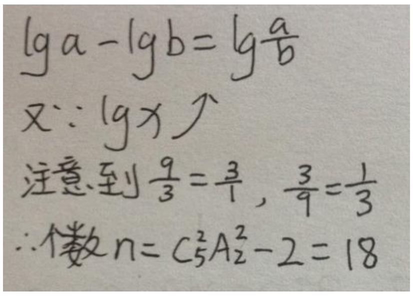
A.9

B.10

C.18

D.20

■　某学生的解答投影



■　使用 TI-Nspire 技术的解答与研究

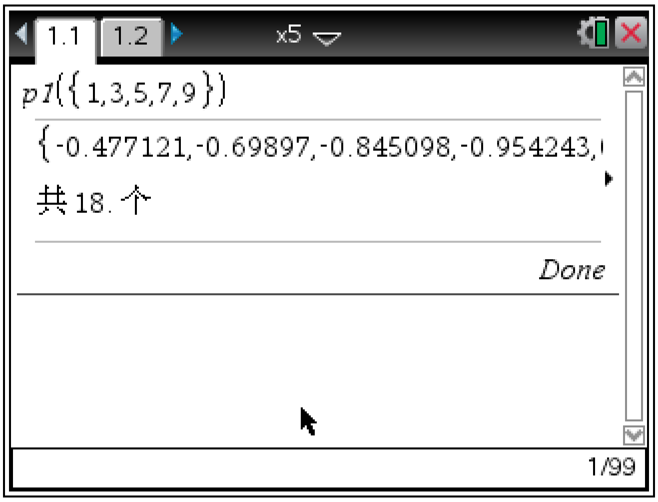
此题放在选择题的倒数第三题，需要仔细运算，若直接A_5^2显然可能出现重复。$\lg a-\lg b=\lg\frac{a}{b}$,所以我们使用 Nspire 图形计算器的编程功能进行研究。

思路如下：将数字存入数组 List 中，并且选 2 个出来，计算$\lg\frac{a}{b}$的值，记为 z，每个值存入 List1 中，且新存入的值 z 不能与 List1 中的原有值重复。

于是基于如上思路写出以下代码：

```
Define p1(list)=
Prgm
Local list1
Local z
Local p
p:=0
list1:={}
For i,1,dim(list)
 For j,1,dim(list)
  If j≠i Then
   z:=log10(list[i]/list[j])
   For k,1,dim(list1)
    If list1[k]=z Then
     p:=1
    EndIf
   EndFor
   If p=0 Then
    list1:=augment(list1,{z})
   EndIf
   p:=0
  EndIf
 EndFor
EndFor
Disp list1
Disp "共",dim(list1),"个"
EndPrgm
```

运行后：



使用编程解决问题，具有一般性。

6.（2013 四川 • 10 • 5 分）

设函数$f(x)=\sqrt{e^x+x-a}(a\in R$，e 为自然对数的底数)，若曲线 y=sin x 上存在点(x_0,y_0)使得$f(f(y_0))=y_0$,则 a 的取值范围是（　　）

A. $[1,e]$

B. $[e^{-1}-1,1]$

C. $[1,e+1]$

D. $[e^{-1}-1,e+1]$

■ 某学生的解答投影

$f(x)=\sqrt{e^x+x-a}\geq 0$

又∵ $y_0=\sin x_0$

∴ $y_0\in[0,1]$

令 $f(x)=x$

∴ $f(f(x))=f(x)=x$ 符合题意.

∴ $\sqrt{e^x+x-a}=x$

∴ $e^x+x-a=x^2$

∴ $a=e^x+x-x^2$

令 $g(x)=e^x+x-x^2$

$g'(x)=e^x+1-2x$

又令 $h(x)=e^x+1-2x$

$h'(x)=e^x-2$

∴ $h(x)$ 在 $[0,\ln 2]\searrow$

在 $[\ln 2,1]\nearrow$

∴ $g'(x)\geq g'(\ln 2)=3-\ln 2>0$

∴ $g(x)$ 在 $[0,1]\nearrow$

$g(0)=1$

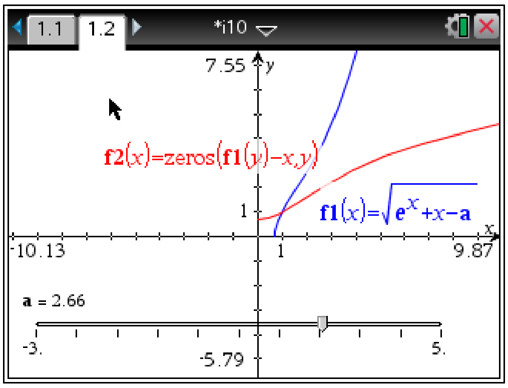
$g(1)=e$

∴ $a\in[1,e]$

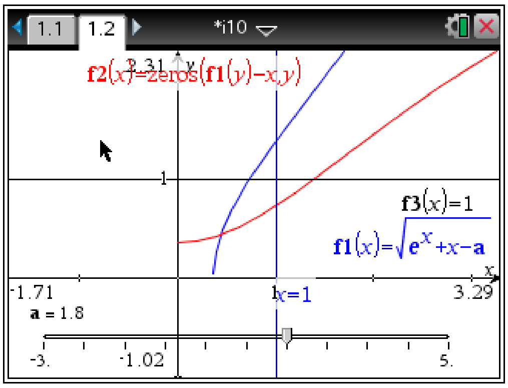
■ 使用 TI-Nspire 技术的解答与研究

此题放在选择题最后一题的位置上，难度非常大。

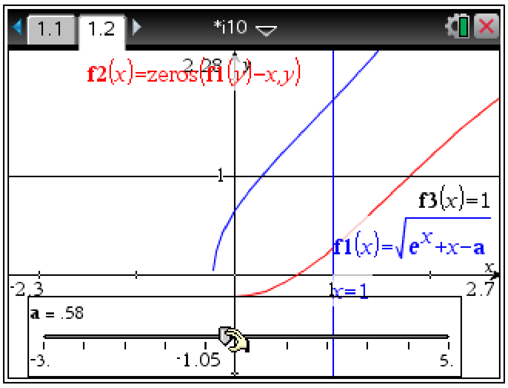
S_1 显然$\sin x\in[-1,1]$，依题意得$y_0\in[0,1]$，两端取反函数，即$f(y_0)=f^{-1}(y_0)$，同时绘制原函数于反函数，在 Nspire 图形计算器中对变量 a 插入游标，观察。

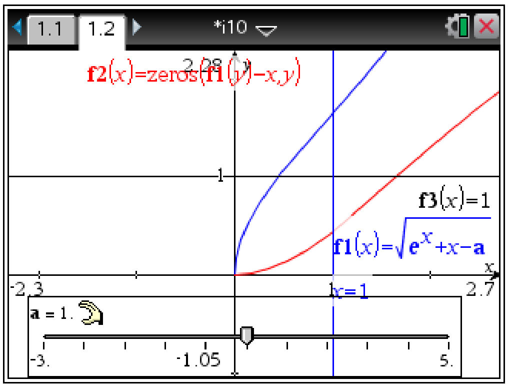


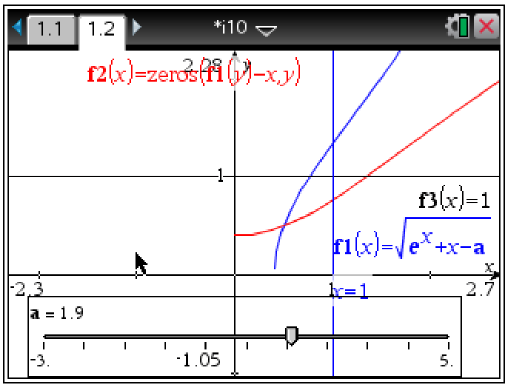
S_2 调节视图，做出$y=1,x=1$作为参照线。

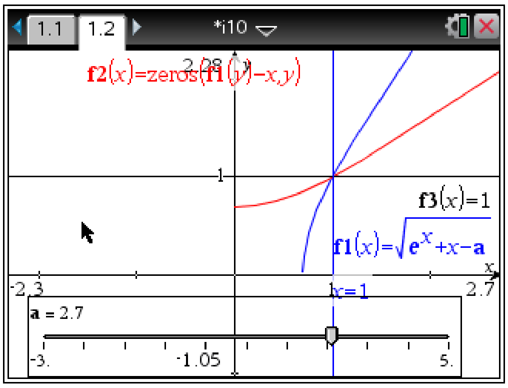


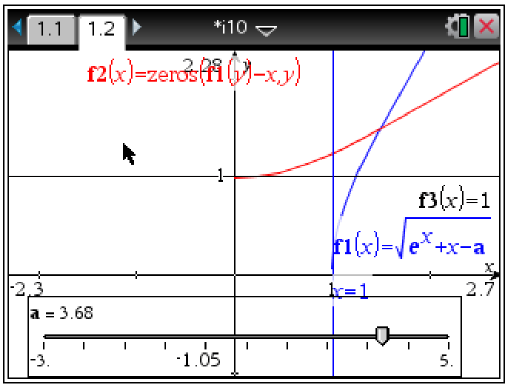
S_3 下面调节游标，使得两函数交点在 x 轴，y 轴，x=1，y=1 围成的小正方形区域内。











发现当$a \in [1, e]$时符合，选 A.

7.（2013 四川・15・5 分）

设$P_1,P_2,\ldots,P_n$为平面 α 内的 n 个点，在平面 α 内的所有点钟，若点 P 到点$P_1,P_2,\ldots,P_n$的距离的和最小，则称点 P 为$P_1,P_2,\ldots,P_n$的一个“中位点”，例如，线段 AB 上的任意点都是端点 A、B 的中位点，现有下列命题：

①若三个点 A、B、C 共线，C 在线段 AB 上，则 C 是 A、B、C 的中位点

②直角三角形斜边的中点是该直角三角形三个顶点的中微点

③若四个点 A、B、C、D 共线，则它们的中位点存在且唯一

④梯形对角线的交点是该梯形四个顶点的唯一中位点

其中的真命题是________________（写出所有真命题的序号）

■ 某学生的解答投影

①:若中位点P不为C点,

当P在直线AB(异于C)上时,作图显然不成立

当P在直线AB外时,在△APB中,$|AP|+|PB|>|AB|$

$\therefore |AP|+|PB|+|PC|>|AB|=|AC|+|CB|$

∴中位点就是C点.

②:若斜边中点P是中位点,则距离和 $l_P=\frac{3}{2}b$

另取点B,距离和 $l_B=a+c$

$l_P-l_B=\frac{3}{2}b-(a+c)=\frac{3}{2}\sqrt{a^2+c^2}-(a+c)$

$=\frac{3\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}-(a+c)\geq(\frac{3\sqrt{2}}{4}-1)(a+c)>0$

$\therefore l_P>l_B$

∴斜边中点不是其中位点.

③:不妨设$A(0,0)$ $B(b,0)$ $C(c,0)$ $D(d,0)$

$d>c>b>0$,对于平面内任给一点$P(x,y)$

$|PA|+|PB|+|PC|+|PD|$

$=\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-b)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x-d)^2+y^2}$

$\geq|x|+|x-b|+|x-c|+|x-d|$

又$\because 0<b<c<d$

∴当$x\in[b,c]$时,原式取到最小值,不唯一

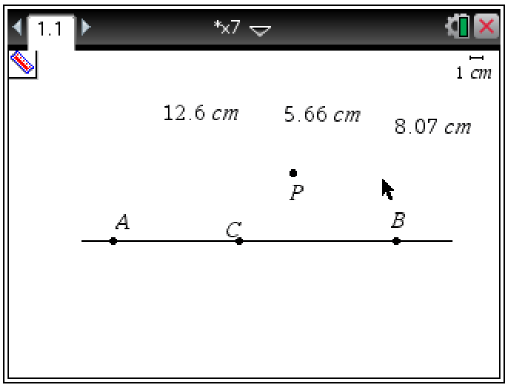
④:由①,AC中位点为线段AC上任意一点,BD中位点为线段BD上任意一点。要同时取到最小,则中位点为AC与BD的交点.

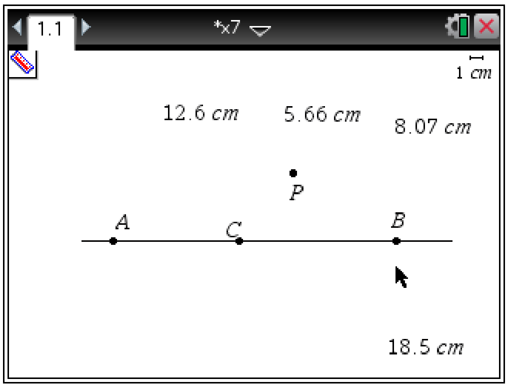
综上,选①④

■ 使用 TI-Nspire 技术的解答与研究

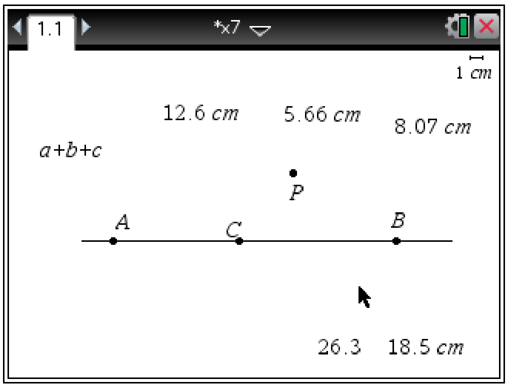
此题放在填空题最后一题的位置上，难度非常大，下面对每个选项分别分析。

S_1 对于选项①，先作图。测出 PA,PB,PC 的距离与|AB|。

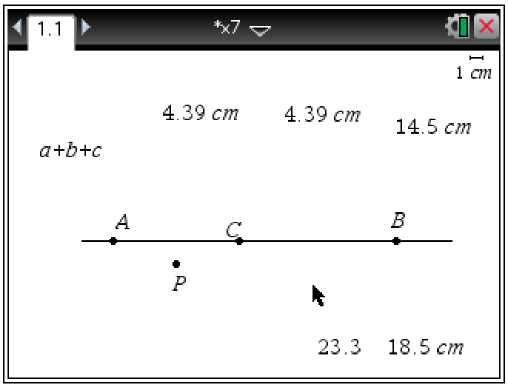


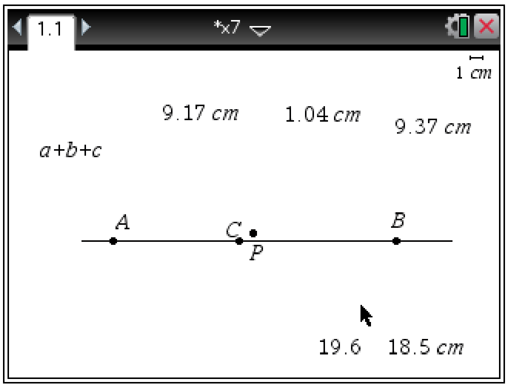


S_2 得到了|AB|为 18.5cm，与|PA|+|PB|+|PC|，使用计算功能计算|PA|+|PB|+|PC|。



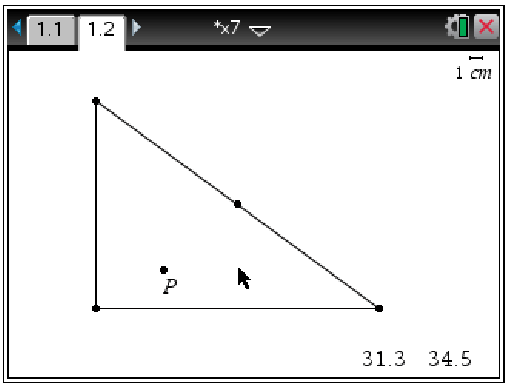
S_3 得到当前值 26.3cm，下面拖动点 P，比较两个值的大小。





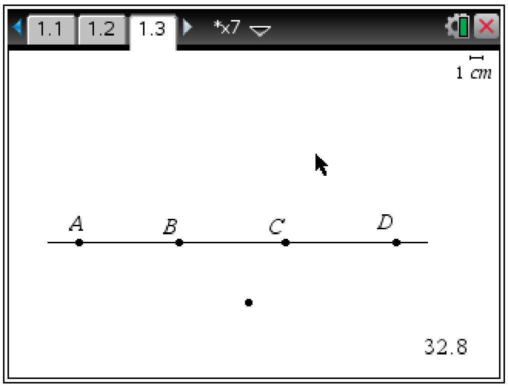
发现越靠近点 C，就越小，当为点 C 的时候取到最小值。因此 C 就是中位点。①正确。

S_4 对于②，作图、测量、计算（由于和①过程大同小异，此处不演示制作过程）。

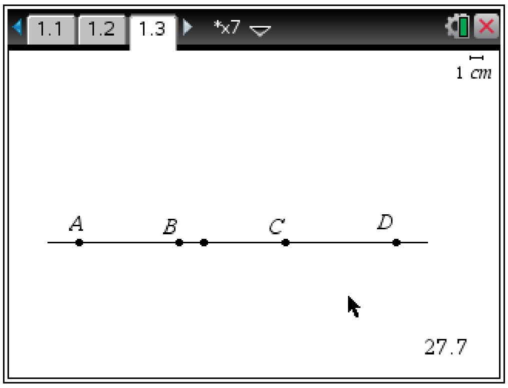


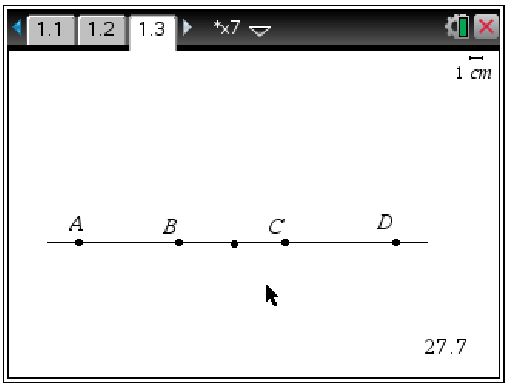
发现此时 P 点位置的距离和（右下第一个数值）已经小于斜边中点的距离和（右下第二个数值），所以斜边中点不是直角三角形的中位点，②错误。

S_5 对于③，作图、测量、计算（由于和①过程大同小异，此处不演示制作过程）



S_6 拖动动点，发现在 BC 线段上取到最小。



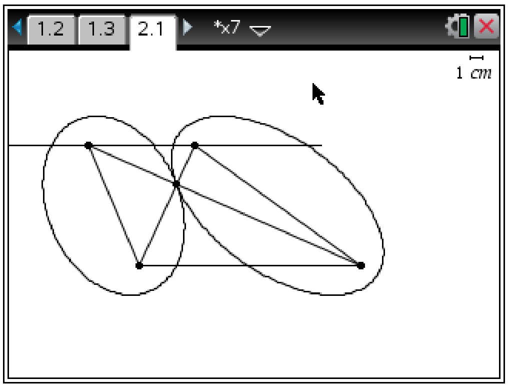


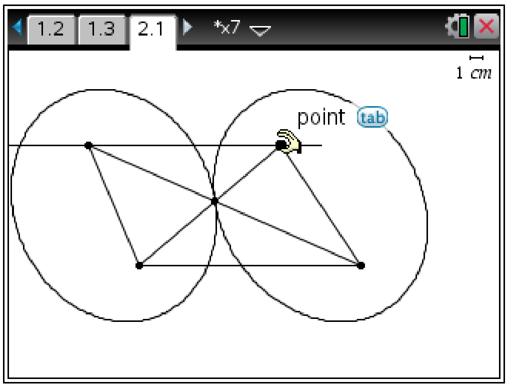
其中位点不唯一，所以③错误。

S_7 对于④，可以作图如法炮制。但注意到①的结论。对于 AC 两点，中位点位于线段 AC 上，对于 BD 两点，中位点位于 BD 线段上。因此对于 ABCD 四点而言，中位点即为 AC 与 BD 的交点。④正确。

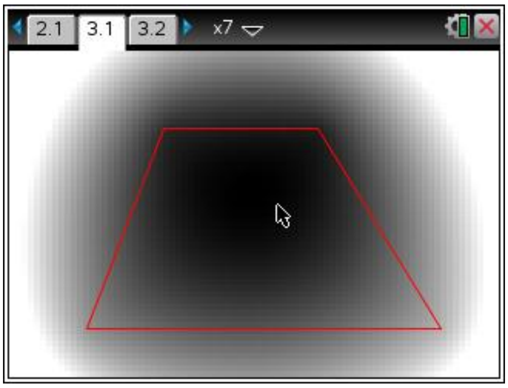
因此选①④。

■ 换个角度继续思考下去，由④可知，在梯形中，分别以梯形斜边的两端点为两焦点并且过对角线交点的两椭圆必然总是相切。下面进行验证。

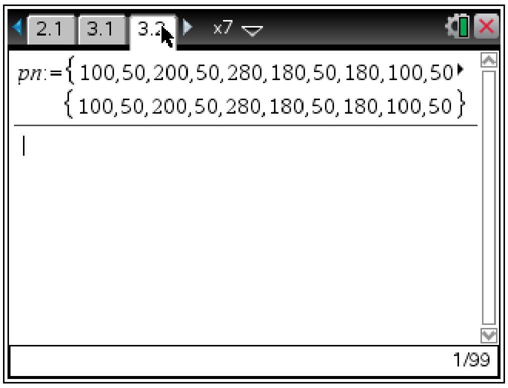




■ 如果把图形距离和大的地方用浅色表示，距离和小的地方用深色表示，以④为例，我们可以做出类似密度分布的图。编写如下程序：



图中坐标最左上为（0,0），最右下约为（318,210），可进行调整，注意最后一个坐标要和第一个坐标相同：

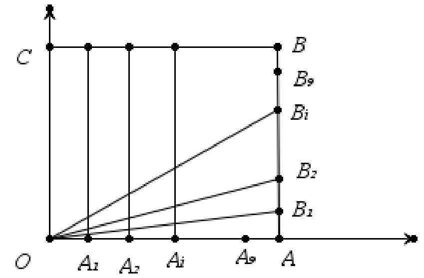


返回后点击屏幕即可刷机，按 Ctrl+s 可以保存。
图中颜色越深的部位，表示距离和越小。可以看出，调节坐标后，距离和最小值均是在对角线中点的位置取到。

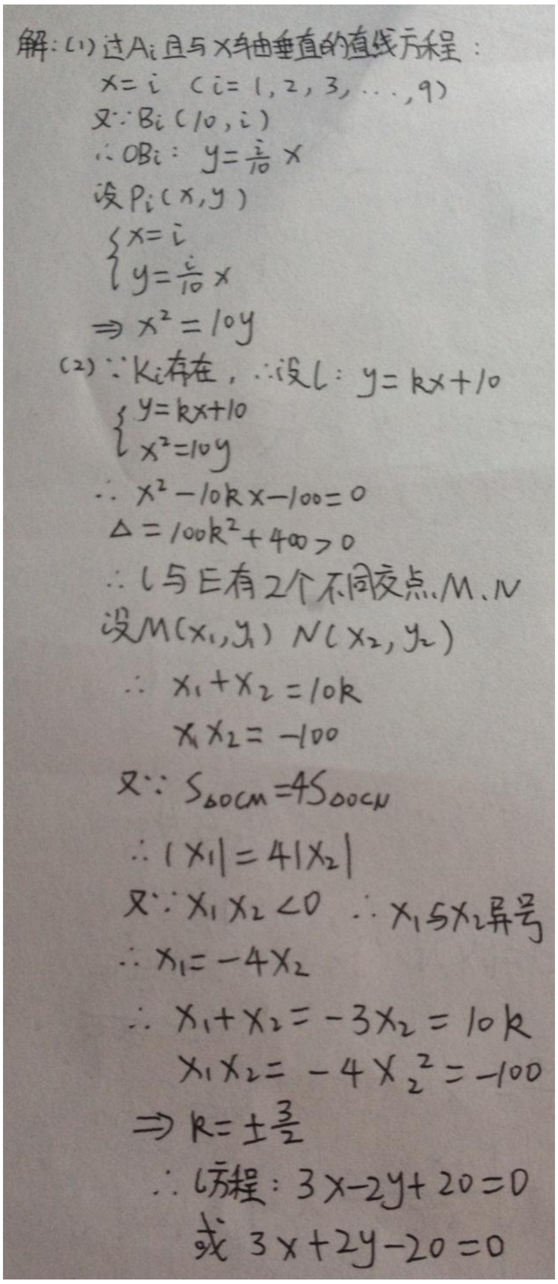
8.（2013 福建・18・12 分）

如图，在正方形 OABC 中，O 为坐标原点，点 A 的坐标为(10,0)，点 C 的坐标为(0,10).分别将线段 OA 和 AB 十等分，分点分别记为 $A_1, A_2, \ldots, A_9$和$B_1, B_2, \ldots, B_9$.

连接OB_i，过A_i 作 x 轴的垂线与OB_i交于点$P_i(i \in N^*, 1 \le i \le 9)$.



■ 某学生的解答投影


解：(1) 过A_i且与x轴垂直的直线方程：

$x=i \quad (i=1,2,3,\ldots,9)$

又∵$B_i(10,i)$

∴OB_i：$y=\frac{i}{10}x$

设$P_i(x,y)$

$\begin{cases} x=i \\ y=\frac{i}{10}x \end{cases}$

$\Rightarrow x^2=10y$

(2) ∵k_l存在，∴设l：$y=kx+10$

$\begin{cases} y=kx+10 \\ x^2=10y \end{cases}$

∴$x^2-10kx-100=0$

$\Delta=100k^2+400>0$

∴l与E有2个不同交点M、N

设$M(x_1,y_1)$ $N(x_2,y_2)$

∴$x_1+x_2=10k$

$x_1x_2=-100$

又∵$S_{\triangle OCM}=4S_{\triangle OCN}$

∴$|x_1|=4|x_2|$

又∵$x_1x_2<0$ ∴x_1与x_2异号

∴$x_1=-4x_2$

∴$x_1+x_2=-3x_2=10k$

$x_1x_2=-4x_2^2=-100$

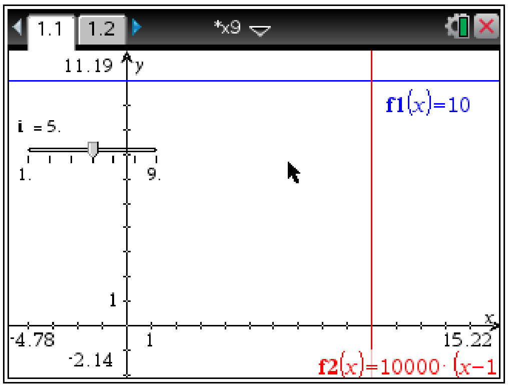
$\Rightarrow k=\pm\frac{3}{2}$

∴l方程：$3x-2y+20=0$

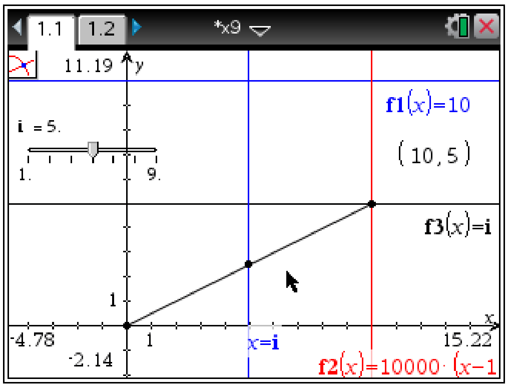
或 $3x+2y-20=0$

■ 使用 TI-Nspire 技术的解答与研究

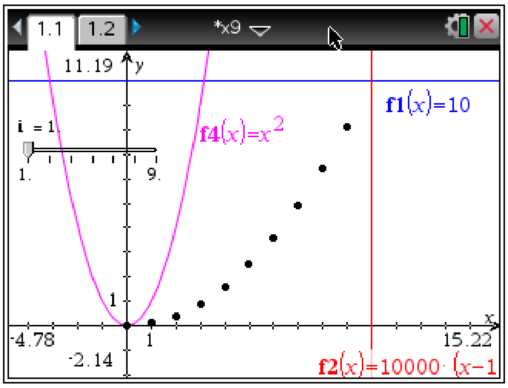
S_1 第一问首先要做出一系列离散的轨迹，于是先作 y=10 与 x=10，并且对变量 i 插入游标，把游标的范围设置为[1,9]，步长 step 为 1。



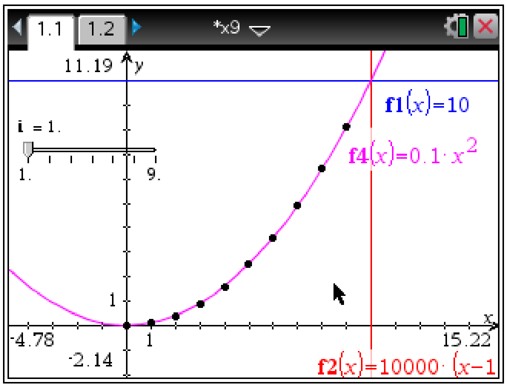
S_2 作 y=i，计算交点后，连接交点与原点。再计算与 x=i 的交点。



S_3 隐藏无关元素后，使用几何追踪，然后拖动游标，得到轨迹。同时，绘制$y = x^2$。

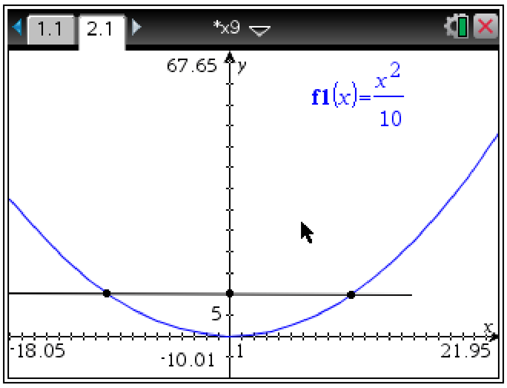


S_4 使用 Nspire 独有的动态抓-移功能，拖动函数，改变开口，并且找到一个合适的系数，使得抛物线很好地重合在前面绘制的轨迹上。

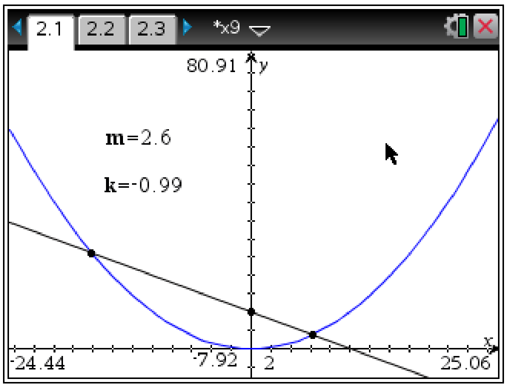


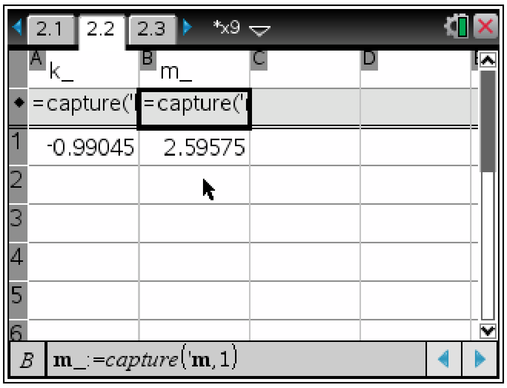
可以看出这个系数大概是 0.1，于是得到标准方程：$10y = x^2$

S_5 对于第二问，调节视图，使用直线工具绘制过 C 点的直线，计算出交点，面积比为 4:1,也就是 CM 和 CN 的长度比为 4:1。由于没说 M 和 N 的顺序，最后肯定有两个互为相反数的斜率值。

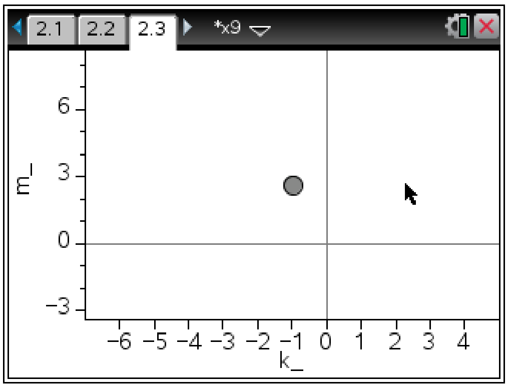


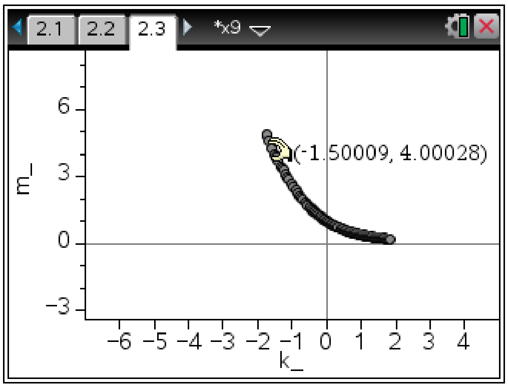
S_6 测量斜率 k 与两段的长度，计算两段长度的比值 m，统计里面动态捕捉 斜率-比值 图象。





S_7 此后拖动直线，改变其斜率，得到一组离散的点，发现当 k=-1.5 时，m(比值)为 4：



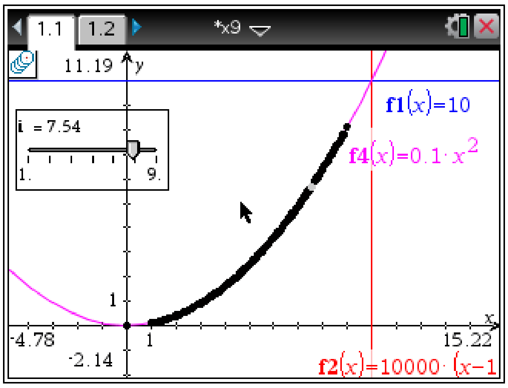


同理，k=1.5 时，比值为 0.25。因此斜率即为$\pm\frac{3}{2}$

所以方程为 $3x - 2y + 20 = 0,3x + 2y - 20 = 0$

■ 换个思路继续研究下去，如果 i 不是离散的，而是连续的，是否也符合抛物线方程呢？

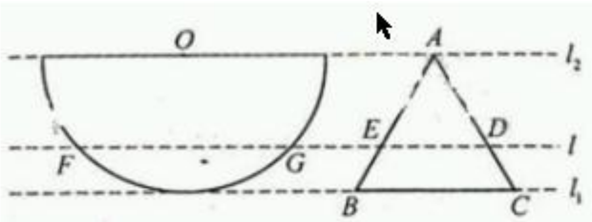
S_1 于是擦出几何追踪，更改游标的步长 step 为 0.02，这个步长在当前精度下，可以认为就是连续的，重新绘制轨迹。

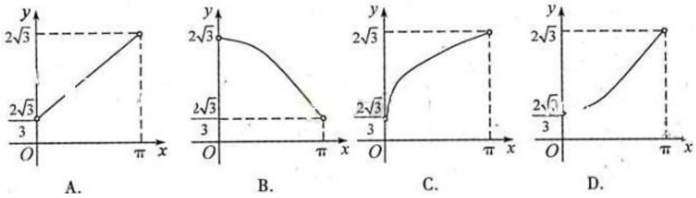


发现如果变量 i 是连续的也符合方程。

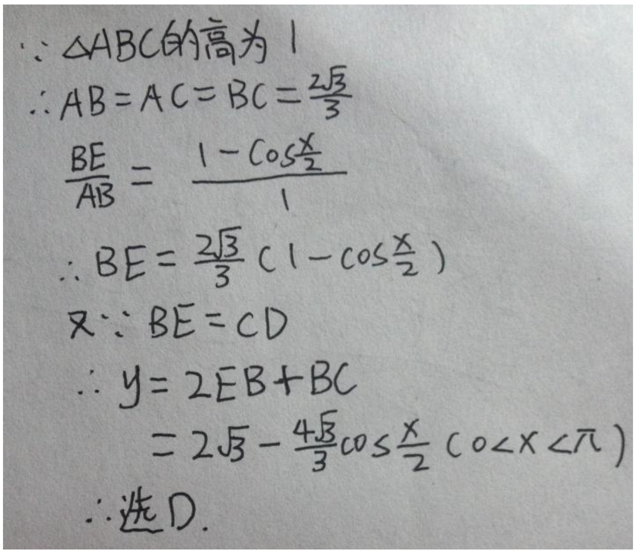
9.（2013 江西・10・5 分）

如图，半径为 1 的半圆 O 与等边三角形 ABC 夹在两平行线 l_1, l_2之间，$l \parallel l_1$，l与半圆相交于 F，G 两点，与三角形 ABC 两边相交于 E, D 两点，设弧$\widehat{FG}$长为 $x(0 < x < \pi)$，$y = EB + BC + CD$，若 l 从l_1平行移动到l_2，则函数 $y = f(x)$的图象大致是（　）





■　某学生的解答投影



∵△ABC的高为1

∴AB=AC=BC=$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\frac{BE}{AB} = \frac{1-\cos\frac{x}{2}}{1}$

∴$BE = \frac{2\sqrt{3}}{3}(1-\cos\frac{x}{2})$

又∵BE=CD

∴y=2EB+BC

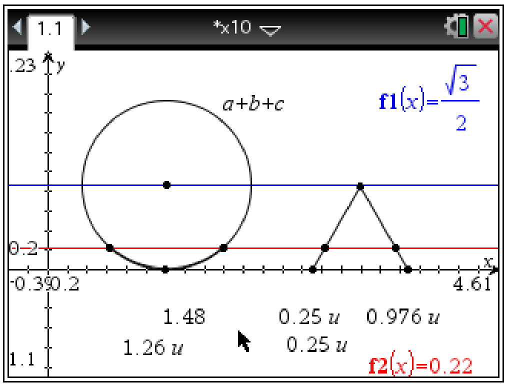
$= 2\sqrt{3} - \frac{4\sqrt{3}}{3}\cos\frac{x}{2}\ (0<x<\pi)$

∴选D.

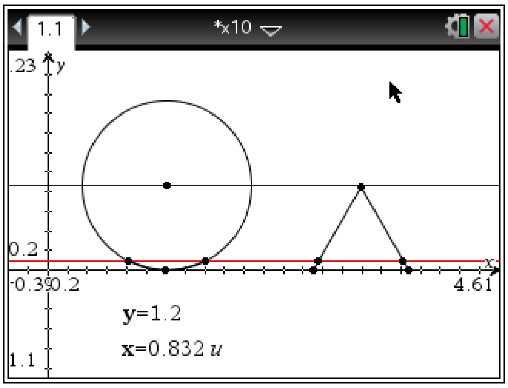
■　使用 Nspire 技术的解答与探究

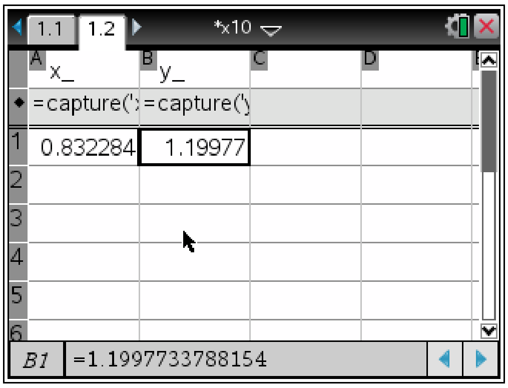
此题综合度非常高，非常难。

S_1 大致作图，并且测量计算有关值与表达式。



S_2 下面隐藏无关元件，并且动态捕捉 x 与 y 的值：

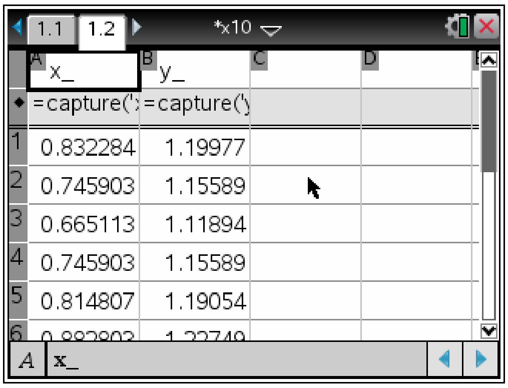




	A x_	B y_	C	D
◆	=capture(	=capture(		
1	0.832284	1.19977		
2				
3				
4				
5				

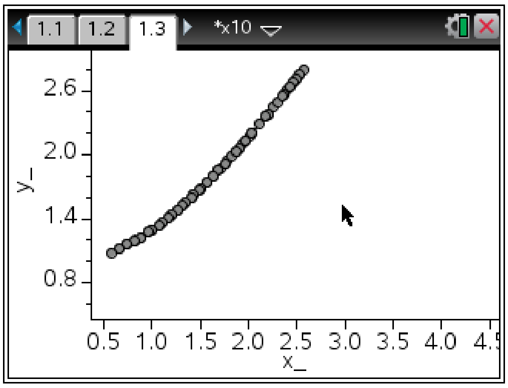
B1 =1.1997733788154

S_3 拖动红色的直线，得到一组离散的点。



	A x_	B y_	C	D
◆	=capture(	=capture(		
1	0.832284	1.19977		
2	0.745903	1.15589		
3	0.665113	1.11894		
4	0.745903	1.15589		
5	0.814807	1.19054		

S_4 使用快速绘图功能，做出图线。



因此选择选项 D

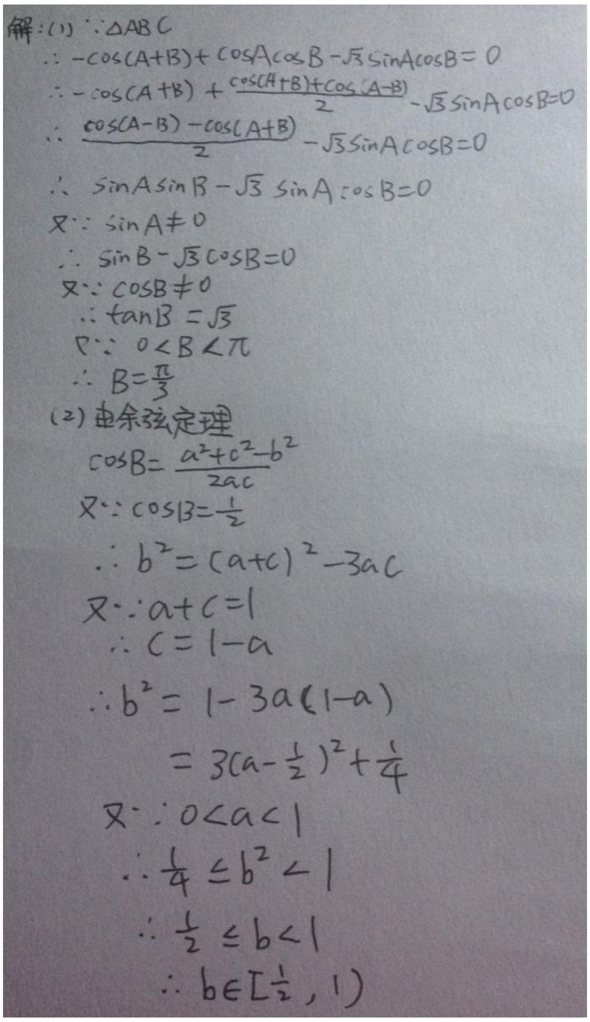
10.（2013 江西・16・12 分）

在 $\triangle$ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a, b, c，已知 $\cos C + (\cos A - \sqrt{3}\sin A)\cos B = 0$.

(I)求角 B 的大小

(II)若 a + c = 1, 求 b 的取值范围

■ 某学生的解答投影



解：(1) ∵△ABC

∴ $-\cos(A+B)+\cos A\cos B-\sqrt{3}\sin A\cos B=0$

∴ $-\cos(A+B)+\frac{\cos(A+B)+\cos(A-B)}{2}-\sqrt{3}\sin A\cos B=0$

∴ $\frac{\cos(A-B)-\cos(A+B)}{2}-\sqrt{3}\sin A\cos B=0$

∴ $\sin A\sin B-\sqrt{3}\sin A\cos B=0$

又∵ $\sin A\neq 0$

∴ $\sin B-\sqrt{3}\cos B=0$

又∵ $\cos B\neq 0$

∴ $\tan B=\sqrt{3}$

又∵ $0<B<\pi$

∴ $B=\frac{\pi}{3}$

(2) 由余弦定理

$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

又∵ $\cos B=\frac{1}{2}$

∴ $b^2=(a+c)^2-3ac$

又∵ $a+c=1$

∴ $c=1-a$

∴ $b^2=1-3a(1-a)$

$=3(a-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}$

又∵ $0<a<1$

∴ $\frac{1}{4}\leq b^2<1$

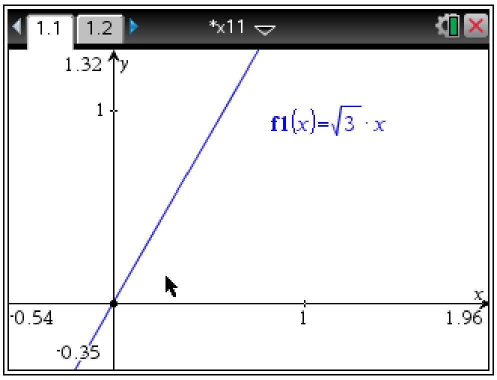
∴ $\frac{1}{2}\leq b<1$

∴ $b\in[\frac{1}{2},1)$

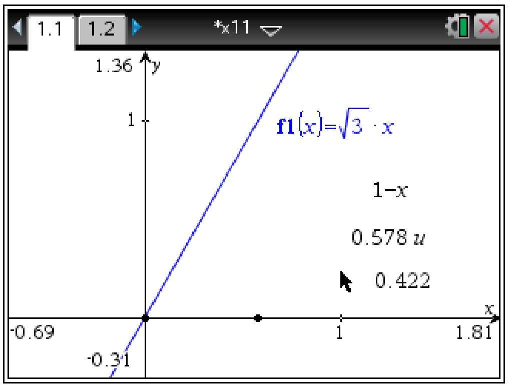
■ 使用 TI-Nspire 技术的解答与研究

下面着重探讨第二问。由第一问 B 为 60°，那么，a+c=1 这个条件的计算器解读就至关重要。

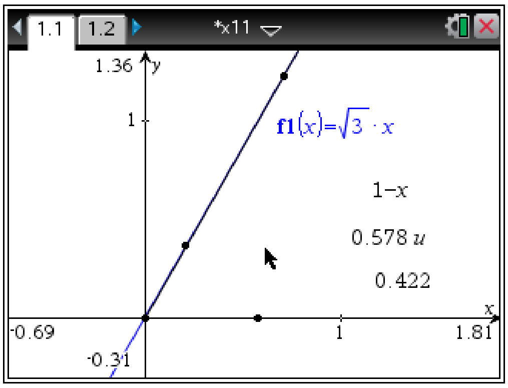
S_1 以原点为点 B，作$y=\sqrt{3}x$



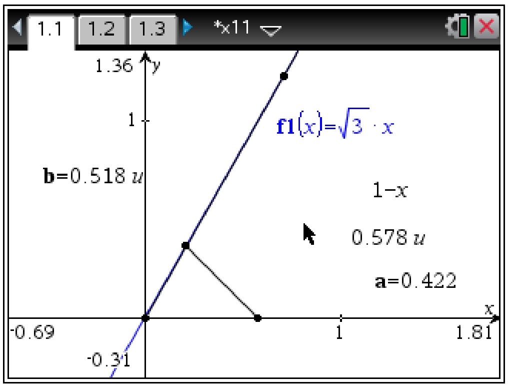
S_2 调节视图，在其中一条射线上适当取一点，测量出一边的长度，由于 a+c=1，再用文本计算功能计算出另外一边的长度：

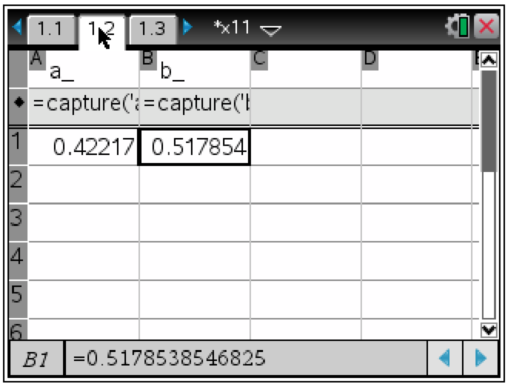


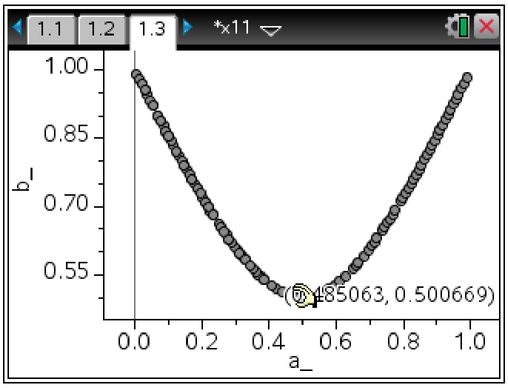
S_3 从原点沿$y=\sqrt{3}x$的单调递增方向作一个向量，使用测量值传递功能，找到另外一点。



S_4 连接两点，封三角形，而连接的这两点的距离，就是 b 的值，测量出其长度为 b，由于对称，记其中一边长度为 a，使用动态捕捉功能捕捉点(a,b)，使用快速绘图功能绘制 a-b 图线。





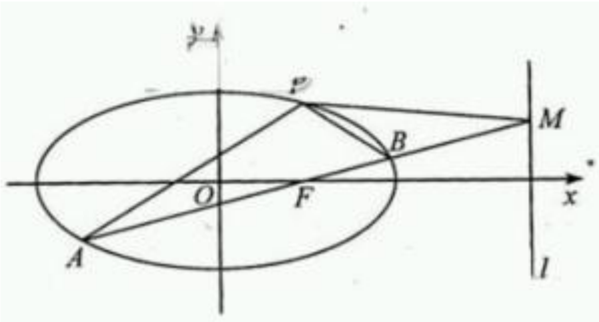


发现 a-b 图线呈现先减小，后增加的趋势，

观察图线，b 的范围为[0,1)

11.（2013 江西・20・13 分）

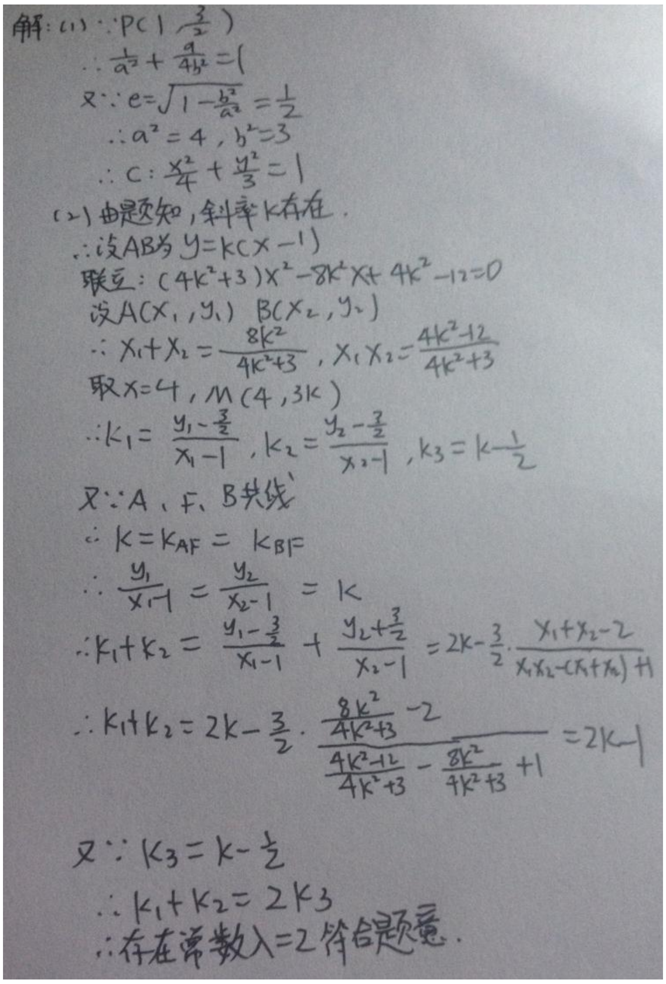
如图，椭圆 C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，(a>b>0)经过点 $P\left(1,\frac{3}{2}\right)$，离心率 e=$\frac{1}{2}$，，直线 l 的方程为 x=4



(I)求椭圆 C 的方程

(II)AB 是经过右焦点 F 的任一弦（不经过点 P），设直线 AB 与直线 l 相交于点 M，记 PA，PB，PM 的斜率分别为k_1, k_2, k_3，问：是否存在常数 λ，使得$k_1+k_2=\lambda k_3$？若存在，求出 λ 的值；若不存在，说明理由。

■　某学生的解答投影



解：(1) ∵ $P(1,\frac{3}{2})$

∴ $\frac{1}{a^2}+\frac{9}{4b^2}=1$

又∵ $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{1}{2}$

∴ $a^2=4$，$b^2=3$

∴ C: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

(2) 由题知，斜率k存在.

∴设AB为 $y=k(x-1)$

联立：$(4k^2+3)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$

设$A(x_1,y_1)$ $B(x_2,y_2)$

∴ $x_1+x_2=\frac{8k^2}{4k^2+3}$，$x_1x_2=\frac{4k^2-12}{4k^2+3}$

取x=4，M(4，3k)

∴ $k_1=\frac{y_1-\frac{3}{2}}{x_1-1}$，$k_2=\frac{y_2-\frac{3}{2}}{x_2-1}$，$k_3=k-\frac{1}{2}$

又∵ A、F、B共线

∴ $k=k_{AF}=k_{BF}$

∴ $\frac{y_1}{x_1-1}=\frac{y_2}{x_2-1}=k$

∴ $k_1+k_2=\frac{y_1-\frac{3}{2}}{x_1-1}+\frac{y_2+\frac{3}{2}}{x_2-1}=2k-\frac{3}{2}\cdot\frac{x_1+x_2-2}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}$

∴ $k_1+k_2=2k-\frac{3}{2}\cdot\frac{\frac{8k^2}{4k^2+3}-2}{\frac{4k^2-12}{4k^2+3}-\frac{8k^2}{4k^2+3}+1}=2k-1$

又∵ $k_3=k-\frac{1}{2}$

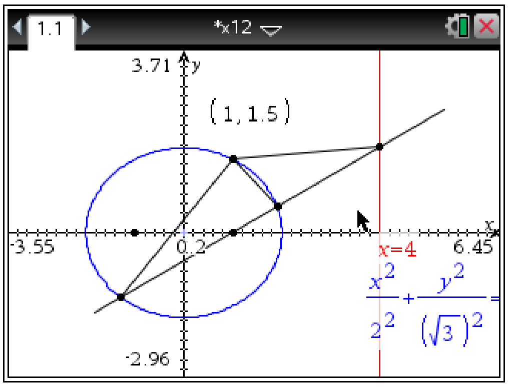
∴ $k_1+k_2=2k_3$

∴存在常数λ=2符合题意.

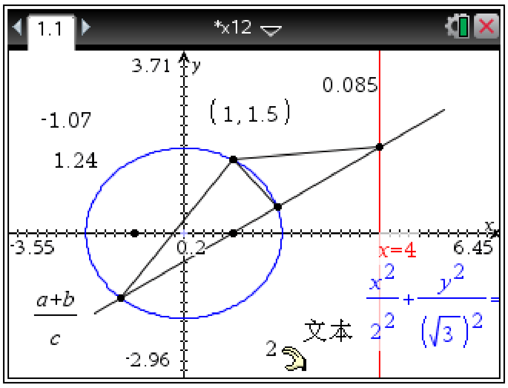
■　使用 TI-Nspire 技术的解答与研究

此题非常难，下面研究第二问。

S_1 先做出椭圆，焦点，直线：



S_2 下面测量三个斜率，由于$\lambda=\frac{k_1+k_2}{k_3}$,直接代入测量数据计算：



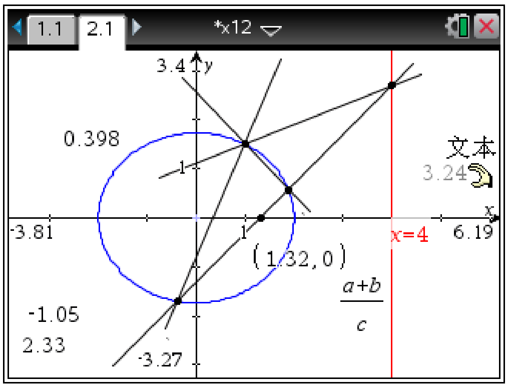
发现值为 2，拖动点 B，改变直线，发现任然为 2。

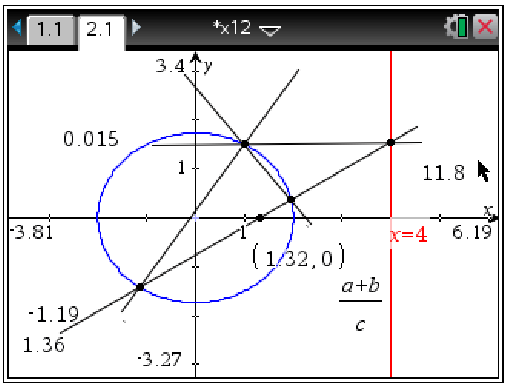
所以存在λ，λ为 2

■　换个思路研究下去，如果 AB 不过焦点 F，而是过 x 轴上的其他点，这个比值是否仍然为定值呢？

S_1 如法炮制，只不过把 F 点换成任一 x 轴上的对象点

S_2 拖动 A 点，观察测量值是否恒定





观察得原题结论不能推广，当且仅当是过焦点时才有比值不变的结论。

12.（2013 北京・8・5 分）

设关于 x,y 的不等式组$\begin{cases}2x-y+1>0\\ x+m<0\\ y-m>0\end{cases}$ 表示的平面区域内存在点 P(x_0

$2y_0=2$. 求得 m 的取值范围是(　　)

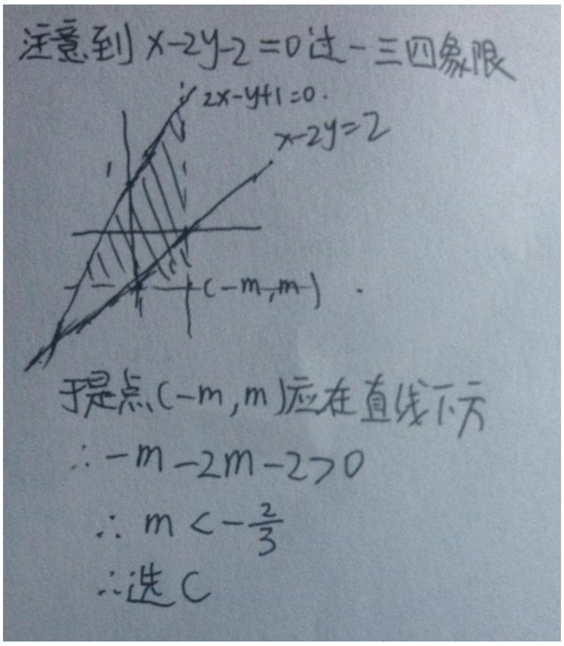
A. $\left(-\infty,\frac{4}{3}\right)$

B. $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$

C. $\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)$

D. $\left(-\infty,-\frac{5}{3}\right)$

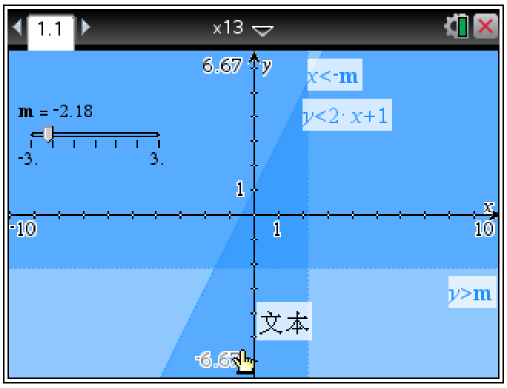
■　某学生的解答投影



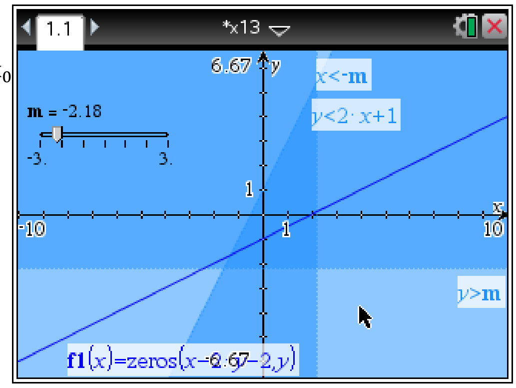
■　使用 TI-Nspire 技术的解答与研究

此题作为北京卷的选择题压轴题，难度非常大。

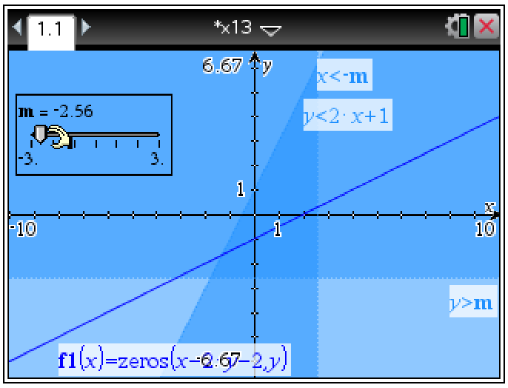
S_1 绘制不等式组，插入游标。

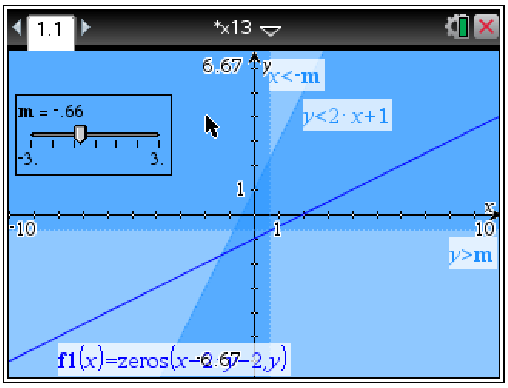


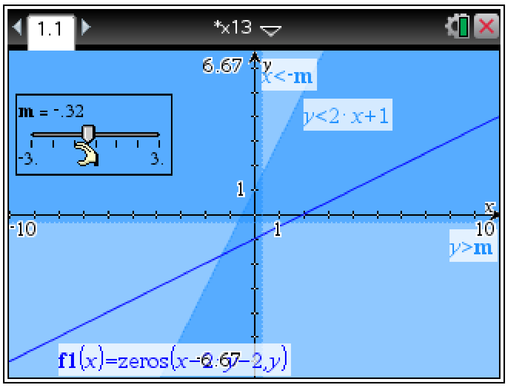
S_2 下面绘制方程$x_0-2y_0=2$。



S_3 下面要完成的一项任务就是，拖动游标，使得直线方程能够"穿过"中间的深蓝色区域。







大致判断出，在 m 小于-0.66 的时候符合题意。

于是选 C

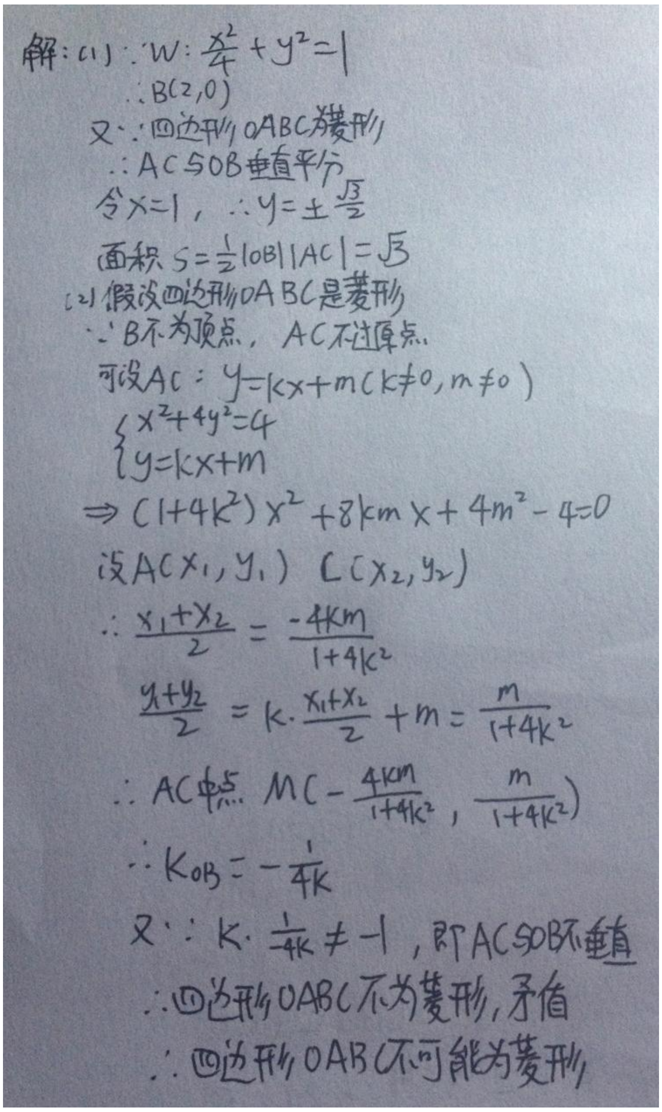
13.（2013 北京・19・14 分）

已知 A，B，C 是椭圆 W:$\frac{x^2}{4}+y^2=1$上的三个点，O 是坐标原点.

(I)当 B 是 W 的右顶点，且四边形 OABC 为菱形时，求此菱形的面积；

(II)当点 B 不是 W 的顶点时，判断四边形 OABC 是否可能为菱形，并说明理由.

■　某学生的解答投影


解：(1) ∵ W: $\frac{x^2}{4}+y^2=1$

∴ B(2,0)

又∵四边形OABC为菱形

∴ AC与OB垂直平分

令x=1，∴ $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

面积 $S=\frac{1}{2}|OB||AC|=\sqrt{3}$

(2) 假设四边形OABC是菱形

∵B不为顶点，AC不过原点，

可设AC: $y=kx+m\ (k\neq 0, m\neq 0)$

$\begin{cases}x^2+4y^2=4\\ y=kx+m\end{cases}$

$\Rightarrow (1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-4=0$

设A(x_1,y_1) C(x_2,y_2)

∴ $\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-4km}{1+4k^2}$

$\frac{y_1+y_2}{2}=k\cdot\frac{x_1+x_2}{2}+m=\frac{m}{1+4k^2}$

∴ AC中点 $M(-\frac{4km}{1+4k^2}, \frac{m}{1+4k^2})$

∴ $k_{OB}=-\frac{1}{4k}$

又∵ $k\cdot\frac{1}{-4k}\neq -1$，即AC与OB不垂直

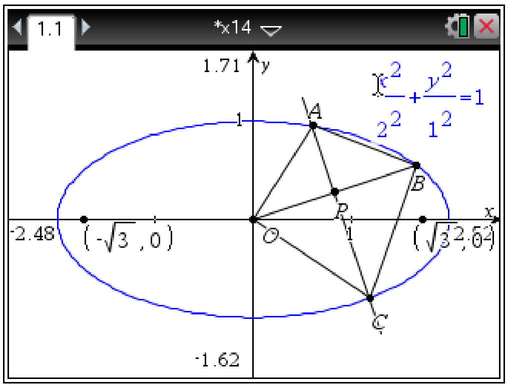
∴四边形OABC不为菱形，矛盾

∴四边形OABC不可能为菱形

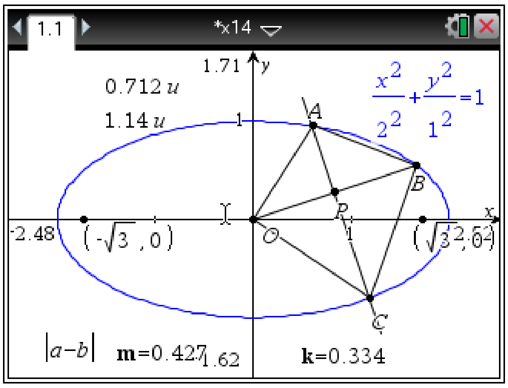
■　使用 TI-Nspire 技术的解答与研究

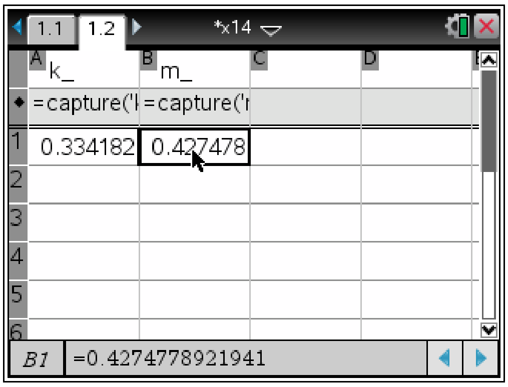
此题作为北京地区的全卷压轴题，难度相当大。下面研究第二问。由于要求是菱形，则充要条件是对角线互相垂直平分。

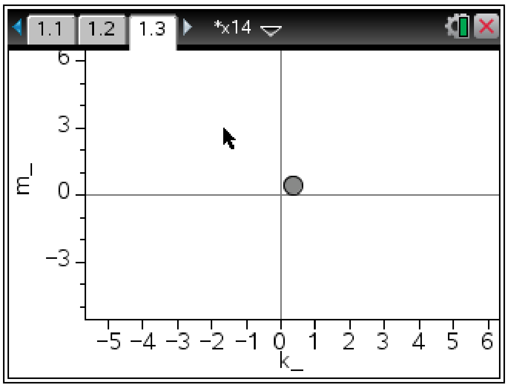
S_1　于是作出 OB 的中垂线，绘制图形。

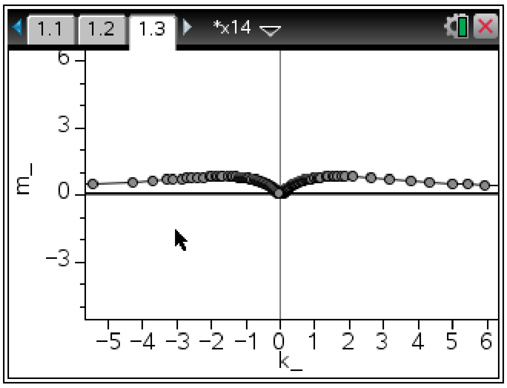


S_1　如图，AC 则为 OB 的中垂线，下面需要使用测量，文本计算工具，计算 AP 与 PC 的差值的绝对值，存入变量 m，而由对称性，不妨以 OB 斜率 k 为自变量，作出 k-m 图线。









发现当 k=0 时，即 B 为长轴顶点时，m=0，当 k 不为 0 时，m 恒不为 0。而 B 不为顶点。

于是四边形 OABC 不可能为菱形。

14.（2013 陕西·10·5 分）

设[x]表示不大于 x 的最大整数，则对任意实数 x,y，有(　　)

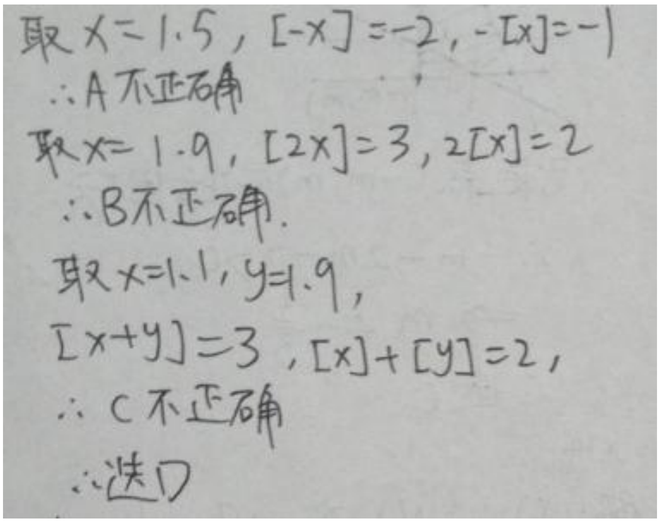
A. $[-x]=-[x]$

B. $[2x]=2[x]$

C. $[x+y]\le[x]+[y]$

D. $[x-y]\le[x]-[y]$

■　某学生的解答投影



取 $x=1.5$，$[-x]=-2$，$-[x]=-1$

∴A不正确

取 $x=1.9$，$[2x]=3$，$2[x]=2$

∴B不正确.

取 $x=1.1$，$y=1.9$，

$[x+y]=3$，$[x]+[y]=2$，

∴C不正确

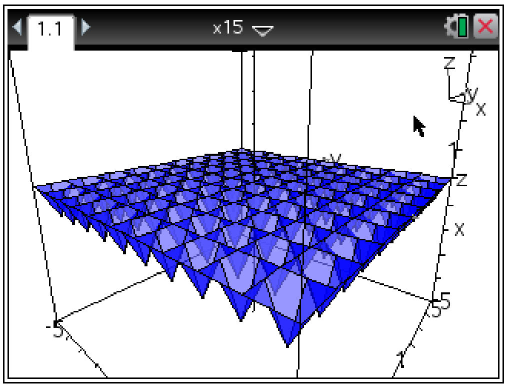
∴选D

■　使用 TI-Nspire 技术的解答与研究

此题难。对于 A，B 选项，可以作差后作图观察是否恒为 0 即可。

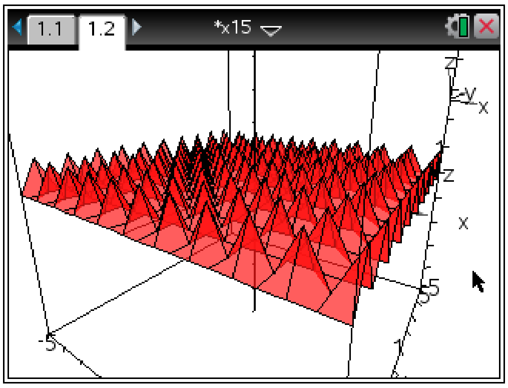
依题意知[x]即为 Nspire 图形计算器内置的 floor()函数。

S_1　于是对于 C 选项直接 RHS-LHS 作图。



发现不恒大于等于 0，于是错误。

S_2　对于 D 如法炮制。



发现恒大于等于 0，成立。于是选 D 选项。

使用 TI-Nspire 计算器的 3D 绘图功能，甚至再引入游标，可以很方便的研究二元函数乃至多元函数。

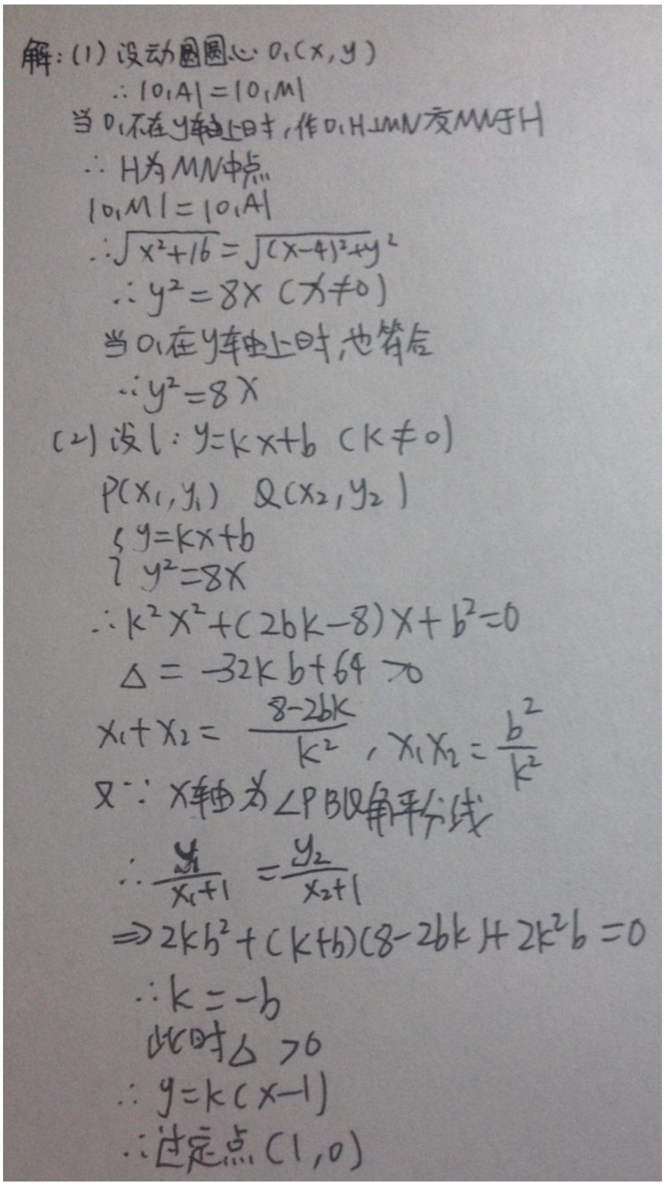
15.（2013 陕西・10・13 分）

已知动圆过定点 A(4,0)，且在 y 轴上截得弦 MN 的长为 8.

(I)求动圆圆心的轨迹 C 的方程;

(II)已知点 B(-1,0)，设不垂直于 x 轴的直线 l 与轨迹 C 交于不同的两点 P，Q，若 x 轴是∠PBQ 的角平分线，证明直线 l 过定点.

■　某学生的解答投影



解:(1) 设动圆圆心 $O_1(x,y)$

$\therefore |O_1A|=|O_1M|$

当 O_1 不在y轴上时，作 $O_1H\perp MN$ 交MN于H

$\therefore$ H为MN中点

$|O_1M|=|O_1A|$

$\therefore \sqrt{x^2+16}=\sqrt{(x-4)^2+y^2}$

$\therefore y^2=8x \ (x\neq 0)$

当 O_1 在y轴上时，也符合

$\therefore y^2=8x$

(2) 设 $l: y=kx+b \ (k\neq 0)$

$P(x_1,y_1)\quad Q(x_2,y_2)$

$\begin{cases} y=kx+b \\ y^2=8x \end{cases}$

$\therefore k^2x^2+(2bk-8)x+b^2=0$

$\Delta=-32kb+64>0$

$x_1+x_2=\frac{8-2bk}{k^2},\ x_1x_2=\frac{b^2}{k^2}$

又 $\because$ x轴为∠PBQ角平分线

$\therefore \frac{y_1}{x_1+1}=\frac{y_2}{x_2+1}$

$\Rightarrow 2kb^2+(k+b)(8-2bk)+2k^2b=0$

$\therefore k=-b$

此时 $\Delta>0$

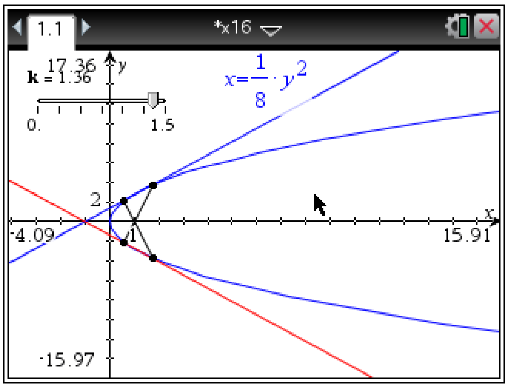
$\therefore y=k(x-1)$

$\therefore$ 过定点 $(1,0)$

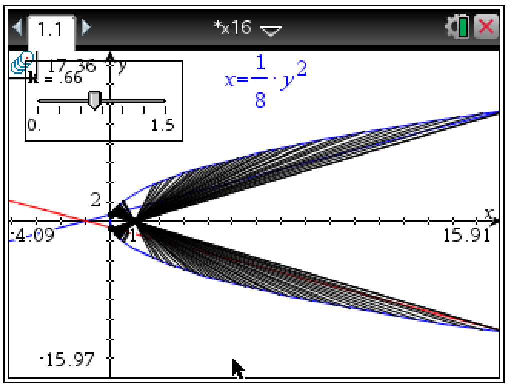
■　使用 TI-Nspire 技术的解答与研究

此题难。下面研究第二问。

S_1 先做出抛物线。由于两直线关于 x 轴对称，所以斜率互为相反数，对斜率 k 插入游标，作图，计算交点，调节视图。



S_2 使用几何追踪功能，移动游标，查看追踪结果。



发现这一簇直线们都不约而同地经过了 x 轴上的(1,0)

所以过定点(1,0)

16.（2013 大纲 • 11 • 5 分）

已知抛物线 C:$y^2=8x$与点 M(-2,2)，过 C 的焦点且斜率为 k 的直线与 C 交于 A，B 两点，若$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$，则 k=（　　　）

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\sqrt{2}$

D. 2

■　某学生的解答投影

设 $A(x_1,y_1)$　$B(x_2,y_2)$

直线方程 $y=k(x-2)$

$\therefore \begin{cases} y=k(x-2) \\ y^2=8x \end{cases}$

$\Rightarrow k^2x^2-(4k^2+8)x+4k^2=0$

$\therefore x_1+x_2=\frac{4k^2+8}{k^2}$

$x_1x_2=4$

又$\because$ M(-2,2)

$\therefore \overrightarrow{MA}=(x_1+2,y_1-2)$

$\overrightarrow{MB}=(x_2+2,y_2-2)$

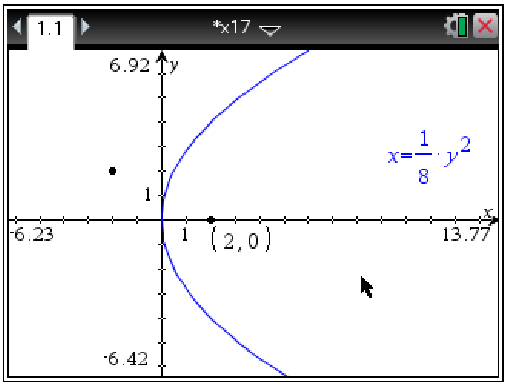
$\therefore \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(x_1+2)(x_2+2)+(y_1-2)(y_2-2)=0$

$\Rightarrow k^2-4k+4=0$

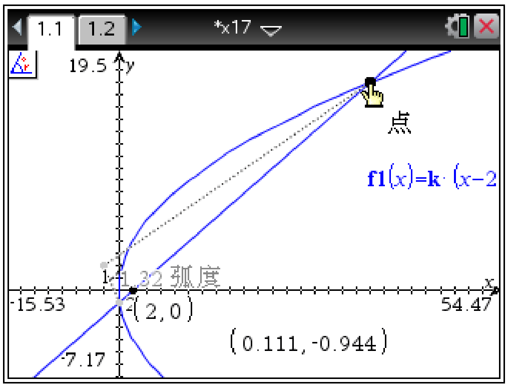
$\therefore k=2$ 选D

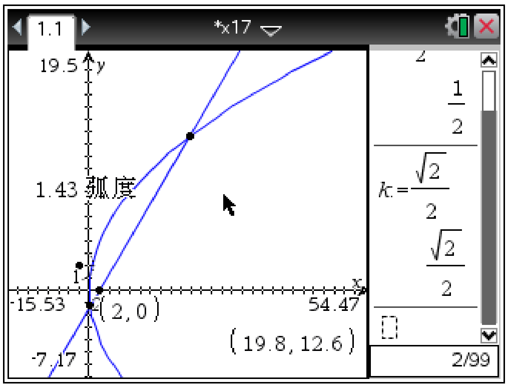
■　使用 TI-Nspire 技术的解答与研究

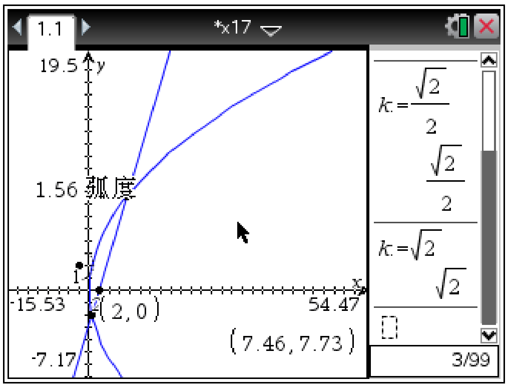
此题难。下面先作出抛物线与抛物线的焦点，再作出 M 点：

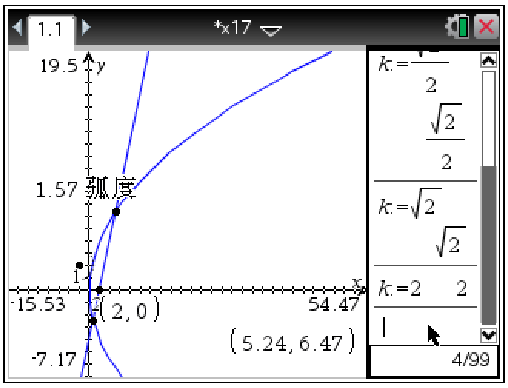


S_2 焦点为（2,0），由此以斜率为 k 作直线，由于 k 没有定义，所以暂时无法看见，代入 k 值，测量角度。









四个选项的 k 值分别代入后，发现 D 选项正确，所以选 D。

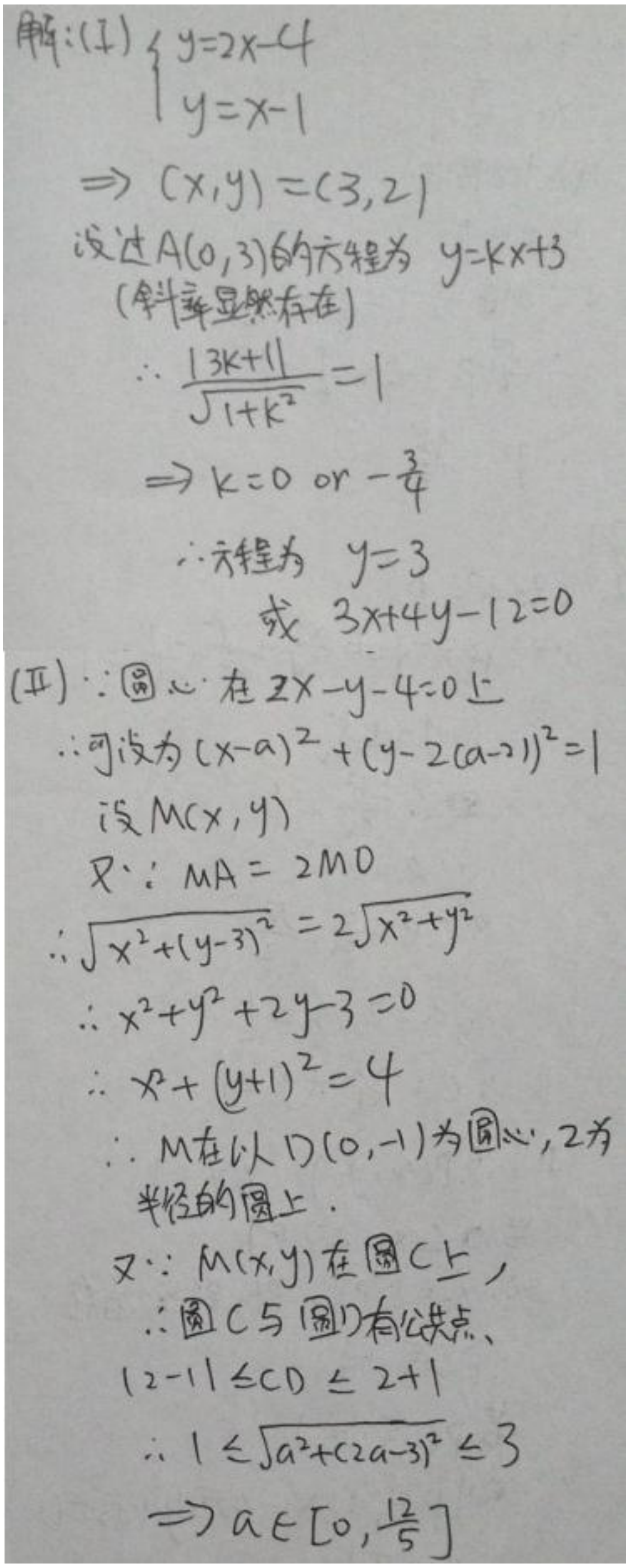
17.（2013 江苏·17·14 分）

如图，在平面直角坐标系 xOy 中，点 A(0,3), 直线 $l: y = 2x - 4$. 设圆 C 的半径为 1, 圆心在 l 上。

(I)若圆心 C 也在直线 y=x-1 上，过点 A 作圆 C 的切线，求切线的方程；

(II)若圆 C 上存在点 M，使 MA=2MO，求圆心 C 的横坐标 a 的取值范围.

■　某学生的解答投影



解：(I) $\begin{cases} y=2x-4 \\ y=x-1 \end{cases}$

$\Rightarrow (x,y)=(3,2)$

设过A(0,3)的方程为 $y=kx+3$

(斜率显然存在)

$\therefore \frac{|3k+1|}{\sqrt{1+k^2}}=1$

$\Rightarrow k=0$ or $-\frac{3}{4}$

∴方程为 $y=3$

或 $3x+4y-12=0$

(II) ∵圆心在 $2x-y-4=0$ 上

∴可设为 $(x-a)^2+(y-2(a-2))^2=1$

设 $M(x,y)$

又∵ $MA=2MO$

$\therefore \sqrt{x^2+(y-3)^2}=2\sqrt{x^2+y^2}$

$\therefore x^2+y^2+2y-3=0$

$\therefore x^2+(y+1)^2=4$

∴ M在以D(0,-1)为圆心，2为半径的圆上.

又∵ M(x,y)在圆C上，

∴圆C与圆D有公共点，

$|2-1| \le CD \le 2+1$

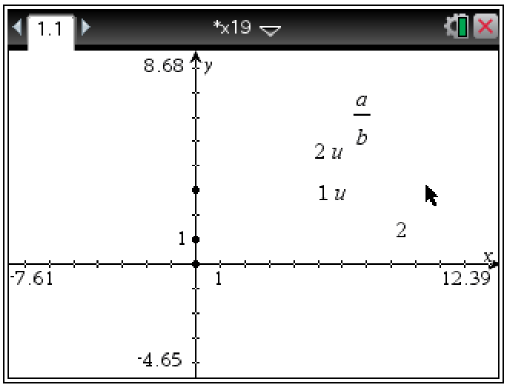
$\therefore 1 \le \sqrt{a^2+(2a-3)^2} \le 3$

$\Rightarrow a \in [0, \frac{12}{5}]$

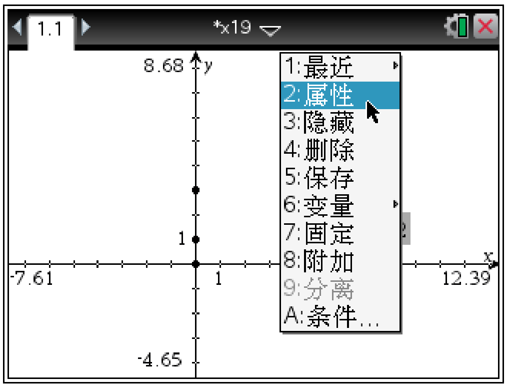
■　使用 TI-Nspire 技术的解答与研究

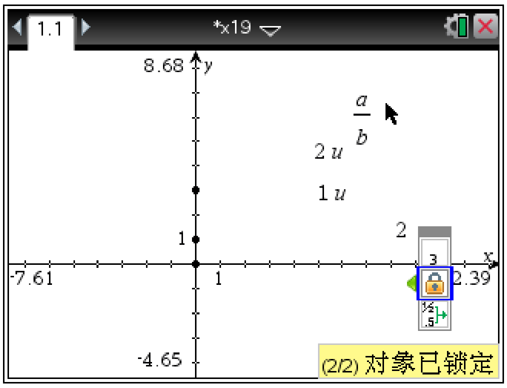
这道题非常难。下面研究第二问，

S_1 已知 A(0,3)，那么 M 点的轨迹是怎样的呢？取特殊点，(0,1) 显然符合，于是作出三点，然后测量两个距离，计算得出显然比值为 2。

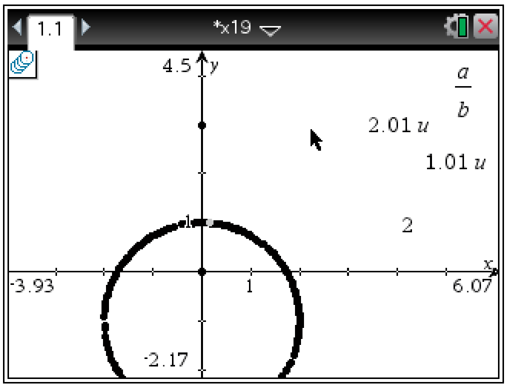


S_2 对于计算结果 2，使用属性，锁定状态设置为对象已锁定。

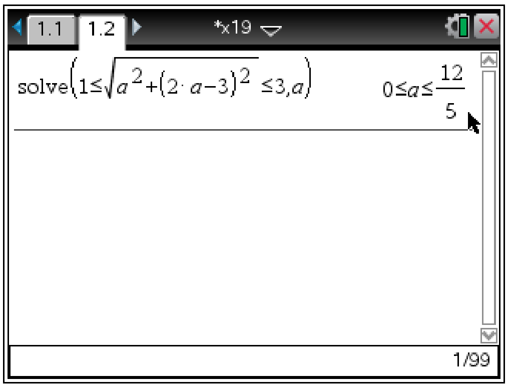




S_3 于是使用几何跟踪跟踪 M 点。



S_4 得到了 M 点的轨迹，于是依题意得圆 C 需要与 M 点轨迹有交点。可以进一步绘制圆 C，拖动分析。但此时我们注意到 M 点的轨迹为以(0,-1)为圆心，2 为半径的圆。而 C 的圆心为(a,2a-4)于是由两圆心距离小于等于两半径和，大于等于两半径差构造不等式。



于是 a 的取值范围是$[0,\frac{12}{5}]$

19.（2013 山东・22・13 分）

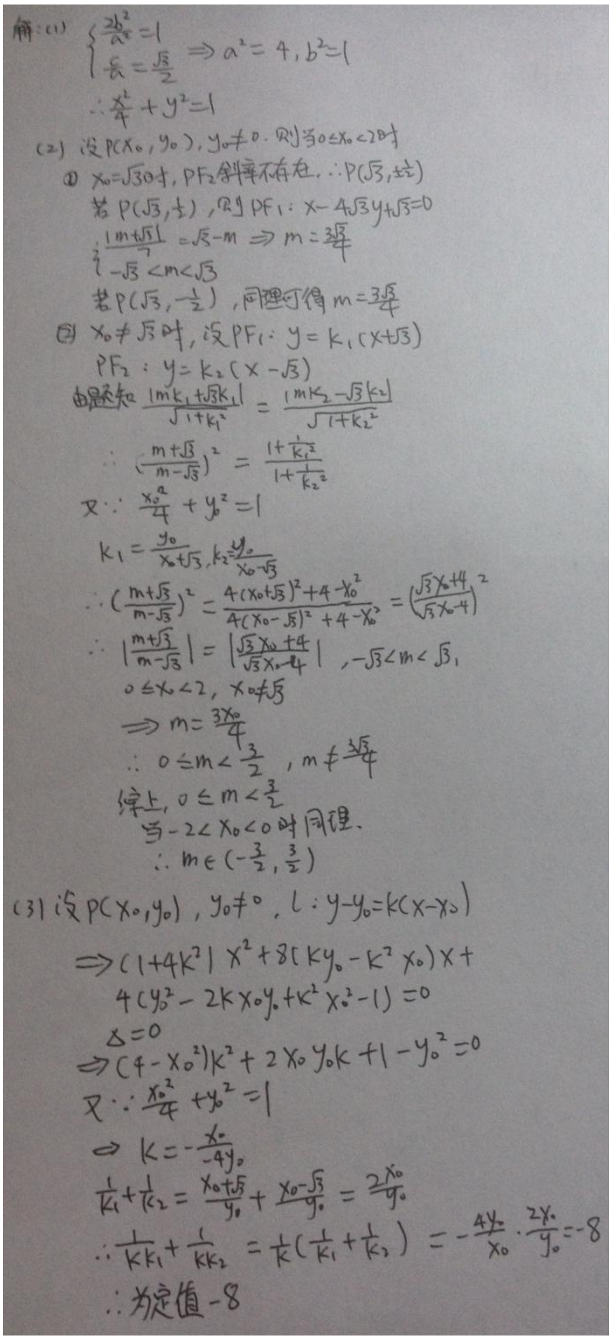
椭圆 C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左,右焦点分别是$F_1,F_2$,离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$,过$F_1$ 且垂直于 x 轴的直线被椭圆 C 截得的线段长为 1.

(I)求椭圆 C 的方程;

(II)点 P 是椭圆 C 上除长轴端点外的任一点，连接PF_1,PF_2.设$\angle F_1PF_2$ 的角平分线 PM 交 C 的长轴于点 M(m,0)，求 m 的取值范围;

(III)在(II)的条件下，过点 P 作斜率为 k 的直线 l，使得 l 与椭圆 C 有且只有一个公共点. 设直线PF_1,PF_2的斜率分别为k_1,k_2，若 k ≠0,试 Pr:$\frac{1}{kk_1}+\frac{1}{kk_2}$ 为定值，并求出这个定值.

■　某学生的解答投影


解:(1) $\begin{cases}\frac{2b^2}{a}=1\\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\Rightarrow a^2=4,b^2=1$

$\therefore \frac{x^2}{4}+y^2=1$

(2) 设$P(x_0,y_0)$,$y_0\neq 0$. 则当$0\le x_0<2$时

① $x_0=\sqrt{3}$时, PF_2斜率不存在. $\therefore P(\sqrt{3},\pm\frac{1}{2})$

若$P(\sqrt{3},\frac{1}{2})$, 则 $PF_1: x-4\sqrt{3}y+\sqrt{3}=0$

$\begin{cases}\frac{|m+\sqrt{3}|}{7}=\sqrt{3}-m\Rightarrow m=\frac{3\sqrt{3}}{4}\\ -\sqrt{3}<m<\sqrt{3}\end{cases}$

若$P(\sqrt{3},-\frac{1}{2})$, 同理可得 $m=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

② $x_0\neq\sqrt{3}$时, 设 $PF_1: y=k_1(x+\sqrt{3})$

$PF_2: y=k_2(x-\sqrt{3})$

由题知 $\frac{|mk_1+\sqrt{3}k_1|}{\sqrt{1+k_1^2}}=\frac{|mk_2-\sqrt{3}k_2|}{\sqrt{1+k_2^2}}$

$\therefore \left(\frac{m+\sqrt{3}}{m-\sqrt{3}}\right)^2=\frac{1+\frac{1}{k_1^2}}{1+\frac{1}{k_2^2}}$

又$\because \frac{x_0^a}{4}+y_0^2=1$

$k_1=\frac{y_0}{x_0+\sqrt{3}}$, $k_2=\frac{y_0}{x_0-\sqrt{3}}$

$\therefore \left(\frac{m+\sqrt{3}}{m-\sqrt{3}}\right)^2=\frac{4(x_0+\sqrt{3})^2+4-x_0^2}{4(x_0-\sqrt{3})^2+4-x_0^2}=\left(\frac{\sqrt{3}x_0+4}{\sqrt{3}x_0-4}\right)^2$

$\therefore \left|\frac{m+\sqrt{3}}{m-\sqrt{3}}\right|=\left|\frac{\sqrt{3}x_0+4}{\sqrt{3}x_0-4}\right|$, $-\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$,

$0\le x_0<2$, $x_0\neq\sqrt{3}$

$\Rightarrow m=\frac{3x_0}{4}$

$\therefore 0\le m<\frac{3}{2}$, $m\neq\frac{3\sqrt{3}}{4}$

综上, $0\le m<\frac{3}{2}$

当$-2<x_0<0$时同理.

$\therefore m\in(-\frac{3}{2},\frac{3}{2})$

(3) 设$P(x_0,y_0)$, $y_0\neq 0$. $l: y-y_0=k(x-x_0)$

$\Rightarrow (1+4k^2)x^2+8(ky_0-k^2x_0)x+4(y_0^2-2kx_0y_0+k^2x_0^2-1)=0$

$\Delta=0$

$\Rightarrow (4-x_0^2)k^2+2x_0y_0k+1-y_0^2=0$

又$\because \frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$

$\Rightarrow k=-\frac{x_0}{-4y_0}$

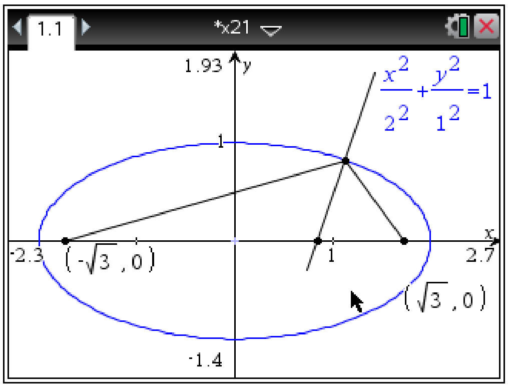
$\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}=\frac{x_0+\sqrt{3}}{y_0}+\frac{x_0-\sqrt{3}}{y_0}=\frac{2x_0}{y_0}$

$\therefore \frac{1}{kk_1}+\frac{1}{kk_2}=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\right)=-\frac{4y_0}{x_0}\cdot\frac{2x_0}{y_0}=-8$

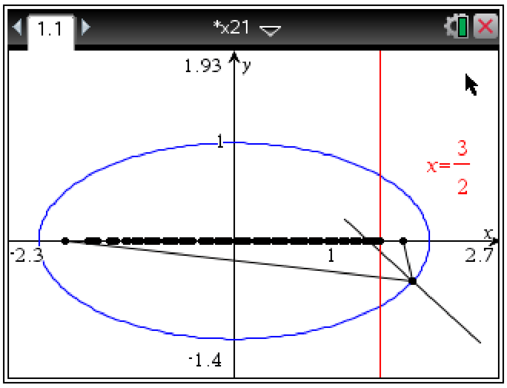
$\therefore$ 为定值 -8

■　使用 TI-Nspire 技术的解答与研究

S_1 做出椭圆与焦点，于是任取一点，做出角平分线：

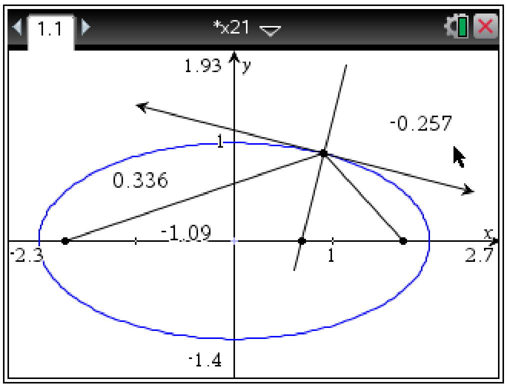


S_2 P 在椭圆上运动，对点 M 使用几何跟踪，并且作出参照线。

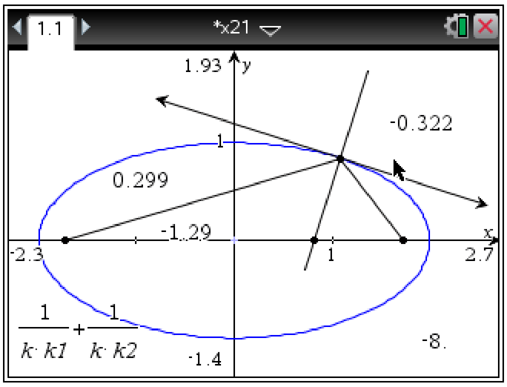


大约极限位置是在 x=$\frac{3}{2}$处，因此 m 的范围是$(-\frac{3}{2},\frac{3}{2})$

S_3 对于第三问，使用切线功能作出切线，并且测量三个斜率。



S_4 计算表达式。



拖动点 P，发现值仍然为-8。于是定值为-8

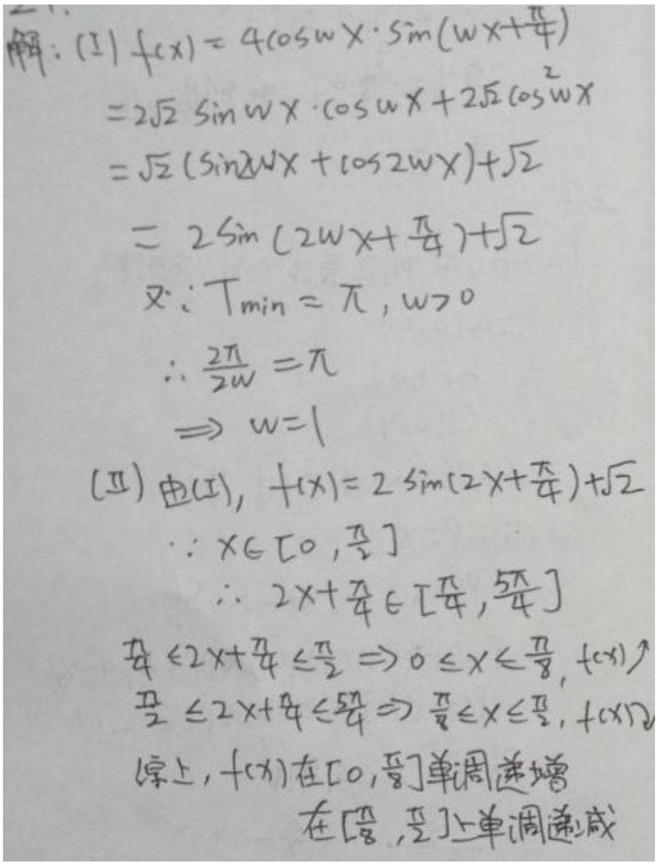
19.（2013 安徽・16・12 分）

已知函数 $f(x) = 4\cos wx \sin\left(wx + \frac{\pi}{4}\right)(w > 0)$的最小正周期为 π

(I)求 w 的值

(II)讨论 f(x)在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的单调性.

■　某学生的解答投影



解：(I) $f(x) = 4\cos wx \cdot \sin(wx+\frac{\pi}{4})$

$= 2\sqrt{2}\sin wx \cdot \cos wx + 2\sqrt{2}\cos^2 wx$

$= \sqrt{2}(\sin 2wx + \cos 2wx) + \sqrt{2}$

$= 2\sin(2wx + \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2}$

又∵ $T_{min} = \pi$, $w>0$

∴ $\frac{2\pi}{2w} = \pi$

$\Rightarrow w=1$

(II) 由(I), $f(x) = 2\sin(2x+\frac{\pi}{4})+\sqrt{2}$

∵ $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

∴ $2x+\frac{\pi}{4} \in [\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$

$\frac{\pi}{4} \le 2x+\frac{\pi}{4} \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \le x \le \frac{\pi}{8}$, $f(x)\nearrow$

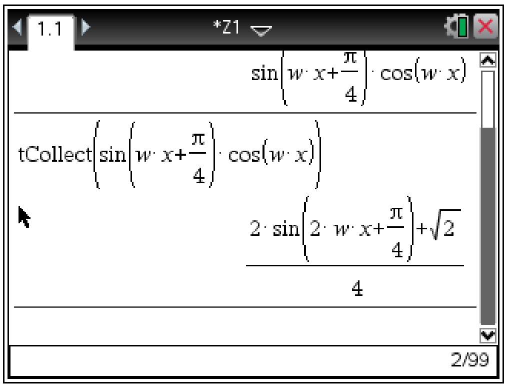
$\frac{\pi}{2} \le 2x+\frac{\pi}{4} \le \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{8} \le x \le \frac{\pi}{2}$, $f(x)\searrow$

综上，f(x)在$[0, \frac{\pi}{8}]$单调递增

在$[\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{2}]$上单调递减

■　使用 TI-Nspire 技术的解答与研究

此题较难，使用 tcollect()函数:



于是 w=1

对于第二问，令 w=1，即研究$\sin(2x + \frac{\pi}{4})$的单调性。

显然$\left[0, \frac{\pi}{8}\right]$单调递增，在 $\left[\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{2}\right]$ 单调递减

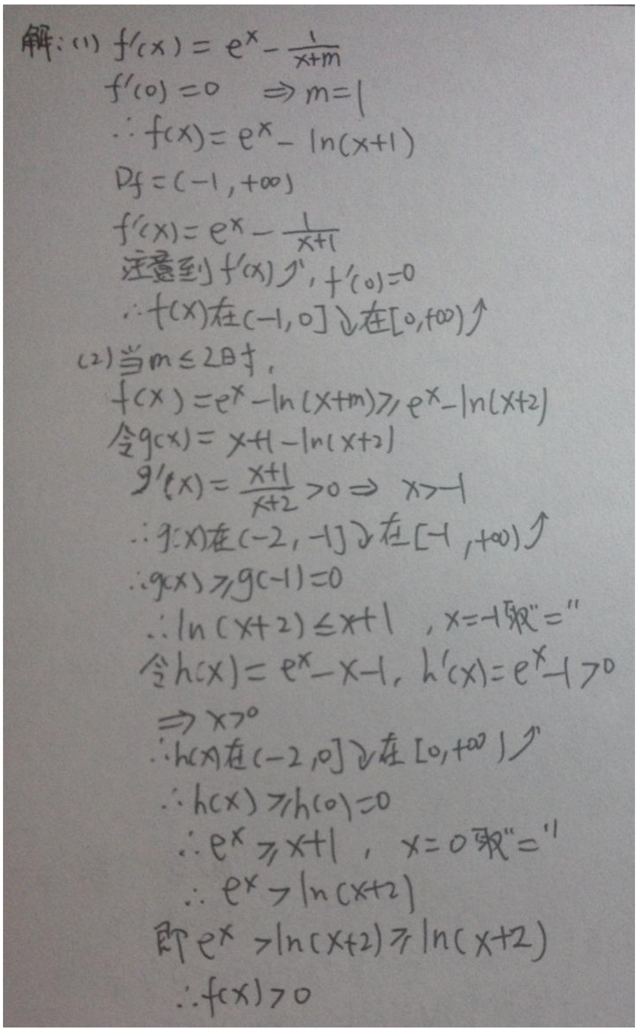
20.（2013 新课标 II • 21 • 12 分）

已知 $f(x) = e^x - \ln(x+m)$

(I) 设 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点，求 m，并讨论 $f(x)$ 的单调性；

(II) 当 $m \le 2$ 时，证明 $f(x) > 0$.

■ 某学生的解答投影



解：(1) $f'(x) = e^x - \frac{1}{x+m}$

$f'(0) = 0 \Rightarrow m = 1$

$\therefore f(x) = e^x - \ln(x+1)$

$D_f = (-1, +\infty)$

$f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1}$

注意到 $f'(x)\nearrow$，$f'(0)=0$

$\therefore f(x)$ 在 $(-1, 0]\searrow$ 在 $[0, +\infty)\nearrow$

(2) 当 $m \le 2$ 时，

$f(x) = e^x - \ln(x+m) \geqslant e^x - \ln(x+2)$

令 $g(x) = x+1-\ln(x+2)$

$g'(x) = \frac{x+1}{x+2} > 0 \Rightarrow x > -1$

$\therefore g(x)$ 在 $(-2, -1]\searrow$ 在 $[-1, +\infty)\nearrow$

$\therefore g(x) \geqslant g(-1) = 0$

$\therefore \ln(x+2) \le x+1$，$x=-1$ 取"="

令 $h(x) = e^x - x - 1$，$h'(x) = e^x - 1 > 0$

$\Rightarrow x > 0$

$\therefore h(x)$ 在 $(-2, 0]\searrow$ 在 $[0, +\infty)\nearrow$

$\therefore h(x) \geqslant h(0) = 0$

$\therefore e^x \geqslant x+1$，$x=0$ 取"="

$\therefore e^x > \ln(x+2)$

即 $e^x > \ln(x+2) \geqslant \ln(x+2)$

$\therefore f(x) > 0$

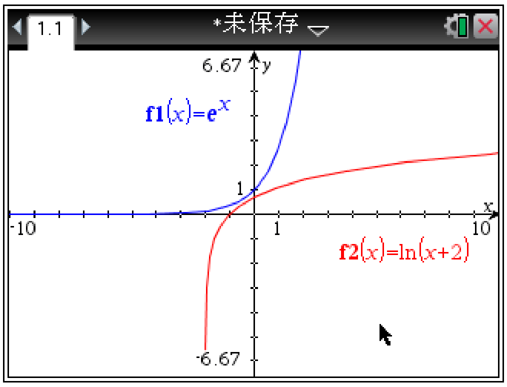
■ 使用 TI-Nspire 技术的解答与研究

此题难，下面研究第二问：

同常规解法，第一步可将 $\ln(x+m)$ 放缩到

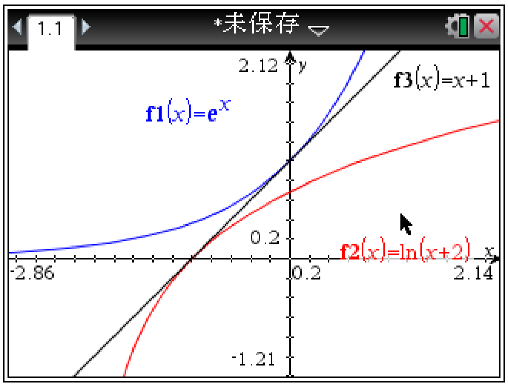
$\ln(x+2)$，下面证明 $e^x > \ln(x+2)$

S_1 由于直接求导可能比较麻烦，于是作图研究函数性质。



我们以前做过题目，证明一个指数函数大于一次函数，或者一次函数大于对数函数，这些是常见的，于是，我们能否从图象中，找出一个这样的“中间桥梁”呢？

S_2 观察函数，于是猜想这样一个函数是 y=x+1,绘制。

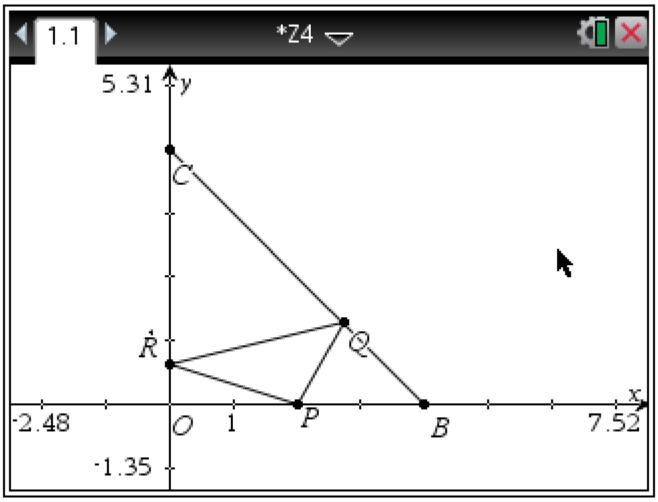


放大后发现确实成立，“中间桥梁”一旦找到，于是后面就可以简单地证明（此处略）。

可惜我看了此题的标准答案，发现是直接作差求导的，反而过于复杂了。

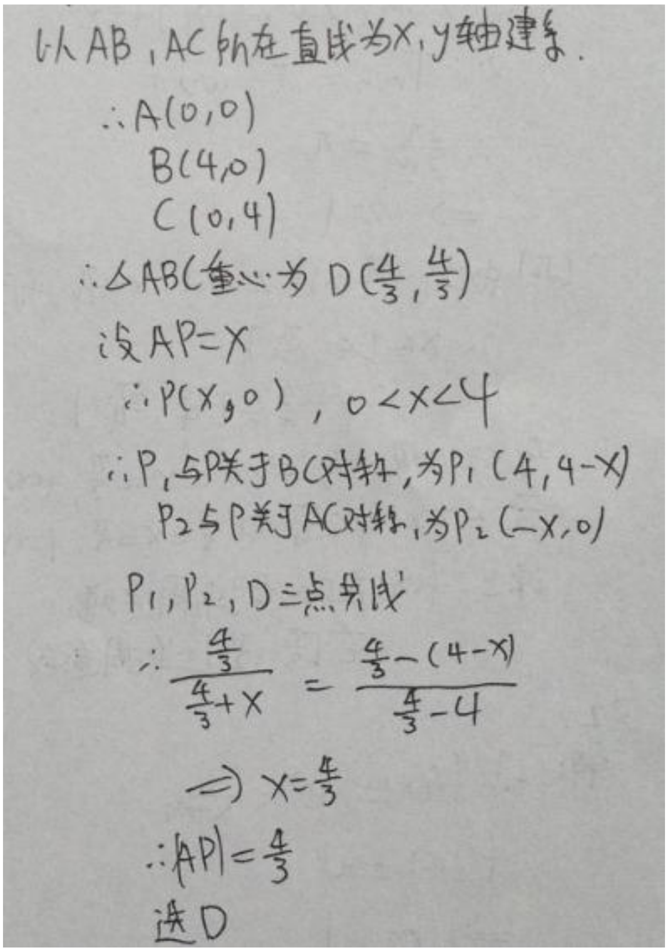
21.（2013 湖南・8・5 分）

在等腰直角三角形 ABC 中，AB=AC=4，点 P 是边 AB 上异于 A，B 的一点.光线从点 P 出发，经 BC，CA 反射后又回到点 P.若光线 QR 经过△ABC 的重心，则 AP等于（　　）



A. 2　　B. 1　C. $\frac{8}{3}$　　D. $\frac{4}{3}$

■　某学生的解答投影



以AB，AC所在直线为x，y轴建系.

∴A(0,0)

B(4,0)

C(0,4)

∴△ABC重心为D($\frac{4}{3}$,$\frac{4}{3}$)

设AP=x

∴P(x,0)，0<x<4

∴P_1与P关于BC对称，为P_1(4,4-x)

P_2与P关于AC对称，为P_2(-x,0)

P_1，P_2，D三点共线

$$\therefore \frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}+x} = \frac{\frac{4}{3}-(4-x)}{\frac{4}{3}-4}$$

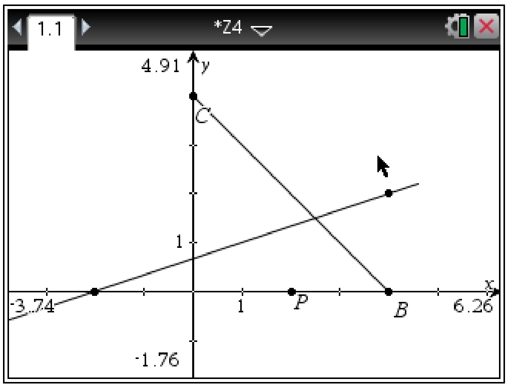
$\Rightarrow x=\frac{4}{3}$

$\therefore |AP|=\frac{4}{3}$

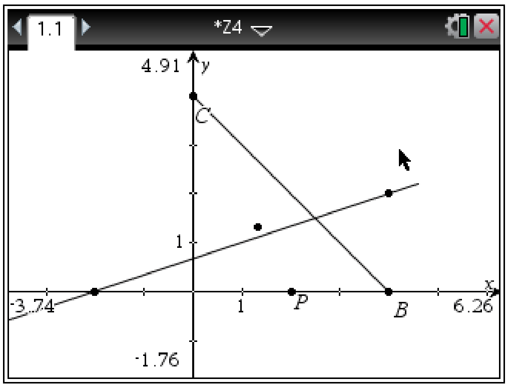
选D

■　使用 TI-Nspire 技术的解答与研究

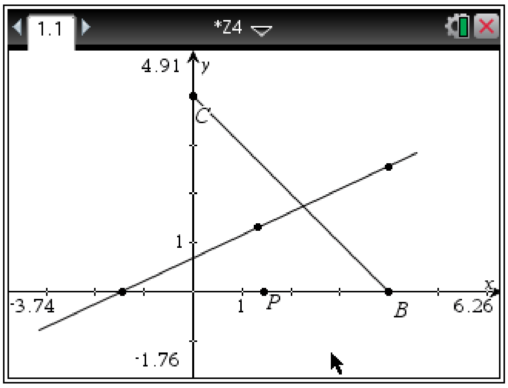
S_1 下面使用对称点功能绘制 RQ。



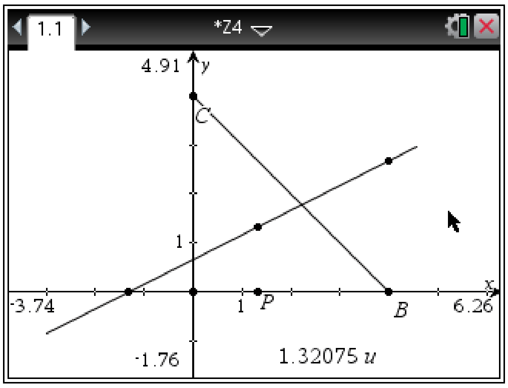
S_2 然后作出重心。



S_3 下面进行一项任务，就是设法移动 P 点，使得直线过重心：



S_4 测量此时 P 离原点的距离。



对照选项，于是选 D

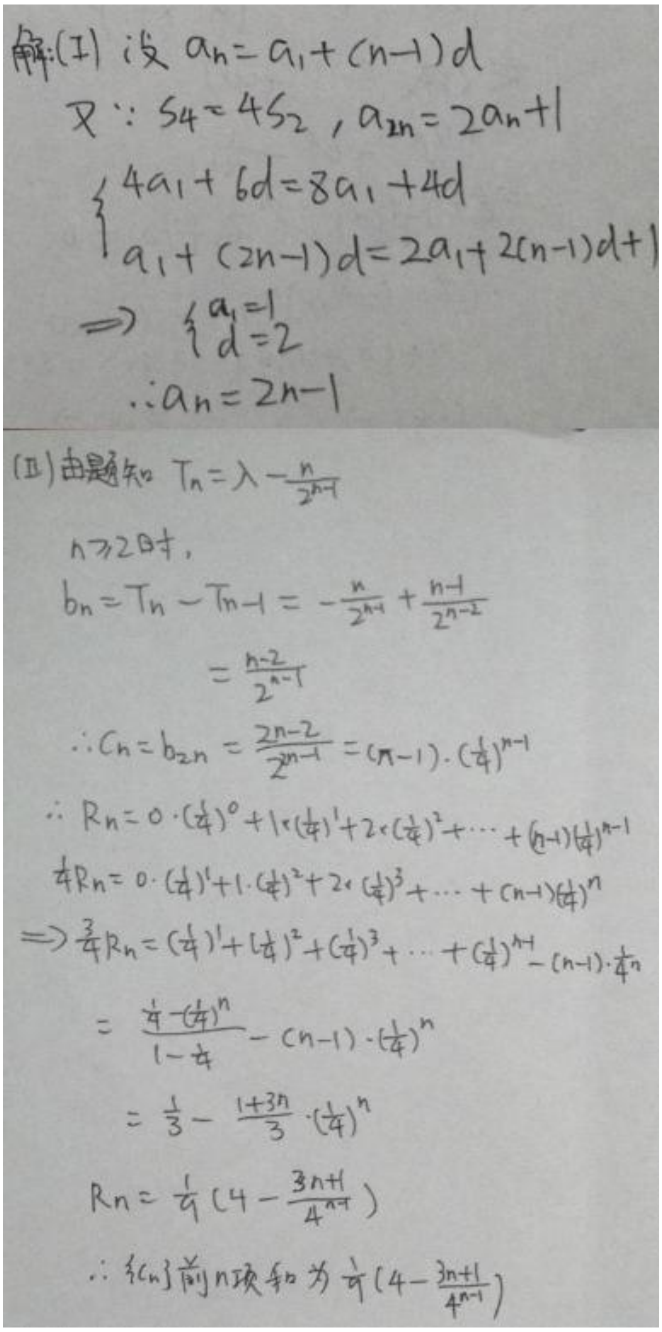
22.（2013 山东・20・12 分）

设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n,且$S_4=4S_2, 2a_n+1$

(I)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(II)设数列$\{b_n\}$的前 n 项和为T_n ,且$T_n+\frac{a_n+1}{2^n}=\lambda(\lambda$为常数).令$c_n=b_{2n}(n\in N^*)$.求数列$\{c_n\}$的前 n 项和$R_n$

■ 某学生的解答投影



解:(I) 设 $a_n=a_1+(n-1)d$

又∵ $S_4=4S_2$, $a_{2n}=2a_n+1$

$\begin{cases}4a_1+6d=8a_1+4d\\ a_1+(2n-1)d=2a_1+2(n-1)d+1\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}a_1=1\\ d=2\end{cases}$

∴ $a_n=2n-1$

(II) 由题知 $T_n=\lambda-\frac{n}{2^{n-1}}$

$n\geq2$时,

$b_n=T_n-T_{n-1}=-\frac{n}{2^{n-1}}+\frac{n-1}{2^{n-2}}$

$=\frac{n-2}{2^{n-1}}$

∴ $c_n=b_{2n}=\frac{2n-2}{2^{2n-1}}=(n-1)\cdot(\frac{1}{4})^{n-1}$

∴ $R_n=0\cdot(\frac14)^0+1\cdot(\frac14)^1+2\cdot(\frac14)^2+\cdots+(n-1)(\frac14)^{n-1}$

$\frac14R_n=0\cdot(\frac14)^1+1\cdot(\frac14)^2+2\cdot(\frac14)^3+\cdots+(n-1)(\frac14)^n$

$\Rightarrow \frac34R_n=(\frac14)^1+(\frac14)^2+(\frac14)^3+\cdots+(\frac14)^{n-1}-(n-1)\cdot\frac{1}{4^n}$

$=\frac{\frac14-(\frac14)^n}{1-\frac14}-(n-1)\cdot(\frac14)^n$

$=\frac13-\frac{1+3n}{3}\cdot(\frac14)^n$

$R_n=\frac19(4-\frac{3n+1}{4^{n-1}})$

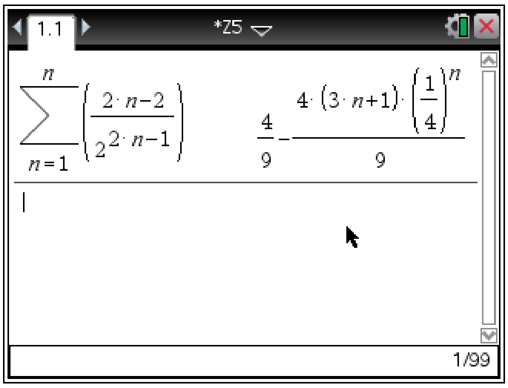
∴ $\{c_n\}$前n项和为 $\frac19(4-\frac{3n+1}{4^{n-1}})$

■ 使用 TI-Nspire 技术的解答与研究

此题难，下面研究第二问

S_1 首先得出$T_n=\lambda-\frac{n}{2^{n-1}}$, $n\geq2$ 时$b_n=\frac{n-2}{2^{n-1}}$, $c_n=b_{2n}=\frac{2n-2}{2^{2n-1}}$

使用 Nspire 内置的求和功能。



便可直接得出答案。