关于$\sin x, x, \tan x$大小关系的研究

藏磊　马圣男

高二年级

北京工大附中

内容提要：

我们在研究$x, \sin x, \tan x$的关系时，运用了分类讨论的思想。当角x是正角时，按不同象限开始讨论。当角x是负角时，再按不同的象限进行讨论。最后近行总结得出结论。

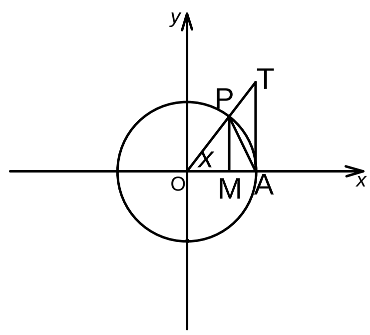
主题词：　TI 图形计算器　　大小关系

关于$\sin x, x, \tan x$大小关系的研究

提要 我们在研究$x, \sin x, \tan x$的关系时，运用了分类讨论的思想。当角x是正角时，按不同象限开始讨论。当角x是负角时，再按不同的象限进行讨论。最后近行总结得出结论。

我们曾见到第二届希望杯中的一道题当$0 < x < \dfrac{\pi}{4}$时，将$x, \sin x, \tan x$由小到大排列是________________；学习了三角函数后，我们想到用单位原来解决.

解：如图所示：在单位圆中,设$\angle AOP = x rad$，则$\overset{\frown}{AP}$的长度为x，角x的正弦线为ＭＰ，正切线为ＡＴ.



$\because S_{\Delta OPA} < S_{扇形OPA} < S_{\Delta OAT}$

$\therefore \dfrac{1}{2} \cdot OA \cdot MP < \dfrac{1}{2} \cdot OA \cdot x < \dfrac{1}{2} \cdot OA \cdot AT$

即$MP < x < AT$

$\therefore \sin x < x < \tan x$.

我们发现当$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$时，此结论和证明依然成立，随即想到：对于任意的角x，$x, \sin x, \tan x$的大小关系又应该是怎样的呢？于是我们开始了研究.

一．当角x是正角时：

(一)角x是第一象限正角

１．若x是锐角，则$\sin x < x < \tan x$；

２．若$2k\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi (k \ge 1, k \in Z)$，则$x > 2\pi$，　$0 < \sin x < 1$，$\tan x > 0$.

由上面证明可知$\sin x < \tan x$，$\sin x < x$

我们利用 TI 图形计算器进行了研究．通过对一些数据的观察，我们发现：x和$\tan x$值的大小关系却不确定，在一定范围内$\tan x < x$, 而在另一范围内 $x < \tan x$．由此我们想到能否找到一个特殊的值 a，当 $x = a + 2k\pi$ 时，$\tan a - 2k\pi = a$ $(a \in (0, \dfrac{\pi}{2}))$；当$x > a + 2k\pi$时，$\tan a$就会大于 x ,(即 $x < \tan x$)，所以得到$\sin x < x < \tan x$；当$x < a + 2k\pi$时，$\tan a$就会小于x, (即$\tan x < x$)，所以可得到$\sin x < \tan x < x$.

所以我们现在的问题就是如何找到当k取大于或等于１的整数时对应的a的值．我们利用 TI 图形计算器进行了计算：

k=1 时，　$a \approx 1.44207$　　　　　$tanx \approx x \approx 7.72526$

k=2 时，　a≈1.49982　　　　$tanx$≈x≈14.06619

k=3 时，　a≈1.52175　　　　$tanx$≈x≈20.37131

k=4 时，　a≈1.53331　　　　$tanx$≈x≈26.66605

…

k=5000 时，　a≈1.57076449740　　　　$tanx$≈x≈31417.4995410

k=5001 时，　a≈1.57076450376　　　　$tanx$≈x≈31423.7784927

…

k=10000 时，　a≈1.57078041170　　　　$tanx$≈x≈62833.4299103

k=10001 时，　a≈1.57078041329　　　　$tanx$≈x≈62839.7079210

…

我们发现当角每增加2π时，满足$\tan x = x$的角的终边就会逆时针旋转一个很小的角度（即a就会增大一个很小的值），而且随着角的增大，a增大的值就越小．因此我们利用 TI 图形计算器的函数拟和功能，构造了以k为自变量，a为函数值的函数，经过多次拟和，选择了拟和较好的对数型函数：$a = 1.49005 + 0.009309\ln k(k \geq 1, k \in Z)$

说明：用此函数式计算出的a值存在一个很小的误差．当k值增大到一定程度时，角的终边会逼近y轴，而用此函数式计算的a值会大于$\frac{\pi}{2}$．经过计算可知，当k＝5848 时，a＜$\frac{\pi}{2}$，且十分接近$\frac{\pi}{2}$，当k=5849 时，a＞$\frac{\pi}{2}$．因此，当k＞5848 时，取$a = 1.49005 + 0.009309\ln 5848$．即$a = \begin{cases} 1.49005 + 0.009309\ln k(1 \leq k \leq 5848, k \in Z) \\ 1.49005 + 0.009309\ln 5848(k \geq 5849) \end{cases}$

结论：当$x > a + 2k\pi(k \geq 1, k \in Z)$时，$\sin x < x < \tan x$；

当$x < a + 2k\pi(k \geq 1, k \in Z)$时，$\sin x < \tan x < x$．

(二)角x是第二象限正角

此时$\tan x$<0，0<$\sin x$ <1，$2k\pi + \frac{\pi}{2}$＜x＜π+2kπ．

结论：$\tan x < \sin x < x$．

(三)角x是第三象限正角

此时x>0，$\sin x$<0，$\tan x$>0．

研究$x, \tan x$的大小关系和研究第一象限正角的方法相同$(a \in (\pi, \frac{3\pi}{2}))$．

k＝0 时，　a≈4.4934094579　　　　$tanx$≈x≈4.4934094577

k=1 时，　a≈4.62093635225　　　　$tanx$≈x≈10.9041216595

k=2 时，　a≈ 4.65438465757　　　　$tanx$≈x≈17.2207552715

k=3 时，　a≈ 4.66989657715　　　　$tanx$≈x≈23.5194524985 k=4 时，　a≈ 4.67885756217　　　$tanx$≈x≈29.8115987868

…

k=5000 时，　a≈ 4.71235715417　　$tanx$≈x≈31420.6389006

k=5001 时，　a≈4.71235716053　　$tanx$≈x≈31426.9191073

k=10000 时，　a≈4.71237306608　　$tanx$≈x≈62836.5498064

k=10001 时，　a≈ 4.71237306768　　$tanx$≈x≈62842.8679328

…

拟和函数：$a=\begin{cases} 4.4934094579(k=0) \\ 4.649202+0.007246\ln k(1\le k\le 6125, k\in Z) \\ 4.649202+0.007246\ln 6125(k\ge 6126, k\in Z) \end{cases}$

结论：当 $x>a+2k\pi(k\ge 0,k\in Z)$ 时，$\sin x<x<\tan x$.

当 $x<a+2k\pi(k\ge 0,k\in Z)$ 时，$\sin x<\tan x<x$.

(四)角 x 是第四象限正角

此时，x>0，$\sin x$<0，$\tan x$<0.

由角 x 的正弦线的长度小于正切线的长度可知：$\tan x<\sin x$.

结论：$\tan x<\sin x<x$.

二.当角 x 是负角时：

(一)角 x 是第一象限负角

此时 x<0，$\sin x$>0，$\tan x$>0.

由角 x 的正弦线的长度小于正切线的长度可知：$\sin x<\tan x$.

结论：$x<\sin x<\tan x$

(二)角 x 是第二象限负角

此时 x<0，$\sin x$>0，$\tan x$<0.

由于第二象限负角与第三象限正角的终边关于 x 轴对称，且对应的 x、tan$x$ 的值分别互为相反数，因此，由对第三象限正角的研究可得结论：

当 $x<-a-2k\pi(k\ge 0,k\in Z)$ 时，$\sin x<x<\tan x$.

当 $x>-a-2k\pi(k\ge 0,k\in Z)$ 时，$\sin x<\tan x<x$.

其中 $a=\begin{cases} 4.4934094579(k=0) \\ 4.649202+0.007246\ln k(1\le k\le 6125, k\in Z) \\ 4.649202+0.007246\ln 6125(k\ge 6126, k\in Z) \end{cases}$

(三)角 x 是第三象限负角

此时 $x<-\dfrac{\pi}{2}-2k\pi$，$-1<\sin x<0$，$\tan x>0$.

结论：$x<\sin x<\tan x$.

(四)角 x 是第四象限负角.

此时 x<0，$-1<\sin x<0$，$\tan x<0$.

由于第四象限负角与第一象限正角的终边关于 x 轴对称，且对应的 x、$\tan x$ 的值分别互为相反数，因此，由对第一象限正角的研究可得结论：

当 $-\dfrac{\pi}{2}<x<0$ 时，$\tan x<x<\sin x$

当 $-\dfrac{\pi}{2}-2k\pi<x<-2k\pi(k\ge 1,k\in Z)$ 时，$x<-a-2k\pi(k\ge 1,k\in Z)$ 时，$\sin x<x<\tan x$；$x>-a-2k\pi(k\ge 1,k\in Z)$ 时，$\sin x<\tan x<x$.

$$\text{其中 } a=\begin{cases}1.49005+0.009309\ln k(1\le k\le 5848,k\in Z)\\ 1.49005+0.009309\ln 5848(k\ge 5849)\end{cases}$$