

**Exame Final Nacional de Matemática A**  
**Prova 635 | Época Especial | Ensino Secundário | 2017**  
12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

**Critérios de Classificação**

10 Páginas

---

## CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

A ausência de indicação inequívoca da versão da prova implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens de escolha múltipla.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

### Itens de seleção

Nos itens de escolha múltipla, a cotação do item só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

### Itens de construção

Nos itens de resposta restrita, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização adequada de vocabulário específico da Matemática.

As respostas que não apresentem exatamente os mesmos termos ou expressões constantes dos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de resposta restrita e de resposta extensa que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelo programa da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à calculadora gráfica», «recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

Situação	Classificação
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada.  Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

**Nota 1** – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

**Nota 2** – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

## CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

### GRUPO I

1. a 8. .... (8 × 5 pontos)..... **40 pontos**

Chave:

Ítems	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	C	B	B	A	B	D	D	A
Versão 2	B	A	D	C	C	A	D	C

### GRUPO II

1. .... **15 pontos**

Escrever  $1 - i$  na forma trigonométrica ..... 1 ponto

Escrever um argumento de  $z_1$ , em função de  $\theta$  ..... 2 pontos

Escrever um argumento de  $\bar{z}_1$ , em função de  $\theta$  ..... 2 pontos

Escrever um argumento de  $z_1^4$ , em função de  $\theta$  ..... 2 pontos

Escrever um argumento de  $\bar{z}_1 \times z_1^4$ , em função de  $\theta$   
(por exemplo,  $\frac{5\pi}{4} - 3\theta$ ) ..... 3 pontos

Justificar que  $w$  pertence ao conjunto  $A$  ..... 5 pontos

Escrever  $\frac{\pi}{12} < \theta < \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{4} < -3\theta < -\frac{\pi}{4}$  ..... 2 pontos

Escrever  $-\frac{3\pi}{4} < -3\theta < -\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{4} - 3\theta < \pi$  ..... 1 ponto

Concluir que  $\bar{z}_1 \times z_1^4$  tem a sua imagem geométrica  
no segundo quadrante ..... 1 ponto

Referir que  $|\bar{z}_1 \times z_1^4| = 1$  ..... 1 ponto

2.1. .... **15 pontos**

Apresentar o significado de  $P(B|\bar{A})$  (É a probabilidade de se retirar uma bola branca da caixa  $C_2$ , sabendo que se retiraram duas bolas de cores diferentes da caixa  $C_1$ ) ..... 5 pontos

Seja  $x$  o número de bolas brancas existentes inicialmente na caixa  $C_2$

Referir que retirar duas bolas de cores diferentes da caixa  $C_1$  significa retirar uma bola branca e uma bola preta ..... 1 ponto

Referir que a caixa  $C_2$  passou a ter nove bolas ..... 1 ponto

Referir que a caixa  $C_2$  passou a ter  $x + 1$  bolas brancas ..... 2 pontos

Escrever  $\frac{x+1}{9} = \frac{2}{3}$  ..... 3 pontos

Obter o valor de  $x$  ..... 1 ponto

Indicar o número de bolas brancas e o número de bolas pretas existentes inicialmente na caixa  $C_2$  (cinco bolas brancas e duas bolas pretas) ..... 2 pontos

**2.2. .... 15 pontos**

Determinar a probabilidade de, numa extração, sair bola branca ..... 1 ponto

Determinar a probabilidade de, numa extração, sair bola preta ..... 1 ponto

Escrever a expressão que dá a probabilidade de nunca sair bola branca ..... 4 pontos

Escrever a expressão que dá a probabilidade de sair uma única vez bola branca ..... 4 pontos

Escrever a expressão que dá a probabilidade pedida ..... 4 pontos

Obter a probabilidade pedida  $(0, 79)$  ..... 1 ponto

**3.1. .... 15 pontos**

Equacionar o problema  $\left(120e^{-2k} = \frac{1}{2} \times 120e^{-k} \text{ ou equivalente} \right)$  ..... 5 pontos

Resolver a equação ..... 10 pontos

Escrever  $120e^{-2k} = \frac{1}{2} \times 120e^{-k} \Leftrightarrow e^{-2k} = \frac{1}{2}e^{-k}$  ..... 1 ponto

Escrever  $e^{-2k} = \frac{1}{2}e^{-k} \Leftrightarrow e^{-k} = \frac{1}{2}$  ..... 5 pontos

Escrever  $e^{-k} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = \ln 2$  ..... 4 pontos

**3.2. .... 15 pontos**

Escrever  $tmv_{[0,3]} = \frac{p(3) - p(0)}{3 - 0}$  ..... 5 pontos

Obter o valor de  $\frac{p(3) - p(0)}{3 - 0}$ , com a aproximação pedida  $(-35)$  ..... 5 pontos

Interpretar o valor obtido no contexto da situação (Ao longo das três primeiras horas, a massa de poluente diluído na água diminuiu, em média, 35 gramas por hora.) ..... 5 pontos

**4.1. .... 15 pontos**

Estudar a continuidade da função  $f$  à esquerda no ponto 1 ..... 8 pontos

Escrever  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - 2}{\text{sen}(x - 1)}$  ..... 1 ponto

Escrever  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - 2}{\text{sen}(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(x - 1)}{\text{sen}(x - 1)}$  ..... 1 ponto

Escrever  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(x-1)}{\sin(x-1)} = \lim_{y=x-1} \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{2y}{\sin y}$  (**ver nota**) ..... 1 ponto

Escrever  $\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{2y}{\sin y} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{2}{\frac{\sin y}{y}}$  ..... 1 ponto

Obter  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  (2) ..... 2 pontos

Concluir que  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$  ..... 1 ponto

Concluir que  $f$  é contínua à esquerda no ponto 1 ..... 1 ponto

Estudar a continuidade da função  $f$  à direita no ponto 1 ..... 6 pontos

Escrever  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (e^{-2x+4} + \ln(x-1))$  ..... 1 ponto

Reconhecer que  $x-1$  tende para zero, por valores positivos, quando  $x$  tende para 1, por valores superiores a 1 ..... 1 ponto

Obter  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  ( $-\infty$ ) ..... 3 pontos

Concluir que  $f$  não é contínua à direita no ponto 1 ..... 1 ponto

Concluir que a afirmação é verdadeira ..... 1 ponto

**Nota** – Se for referido que  $x \rightarrow 1^-$  é equivalente a  $x-1 \rightarrow 0^-$ , esta etapa deve ser considerada cumprida.

**4.2.** ..... **15 pontos**

Identificar o declive da reta pedida com  $f'(1 - \frac{\pi}{2})$  ..... 2 pontos

Determinar  $f'(1 - \frac{\pi}{2})$  (**ver nota**) ..... 7 pontos

Obter uma expressão de  $f'(x)$ , em  $]1 - \pi, 1[$  ..... 4 pontos

Obter  $f'(1 - \frac{\pi}{2})$  ..... 3 pontos

Calcular  $f(1 - \frac{\pi}{2})$  ..... 2 pontos

Escrever a equação reduzida da reta pedida ( $y = -2x + 2$ ) ..... 4 pontos

**Nota** – Se a resposta evidenciar a intenção de determinar a expressão da derivada da função, a pontuação mínima a atribuir a esta etapa é 1 ponto.

**4.3. .... 15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

**1.º Processo**

- Determinar  $f'(x)$  ..... 3 pontos
- Determinar  $f''(x)$  ..... 4 pontos
- Reproduzir o gráfico da função  $f''$  no intervalo  $]1, 2[$  (**ver notas 1 e 2**) ..... 4 pontos
- Determinar o zero da função  $f''$  no intervalo  $]1, 2[$  (1,23) ..... 4 pontos

**2.º Processo**

- Determinar  $f'(x)$  ..... 3 pontos
- Reproduzir o gráfico da função  $f'$  no intervalo  $]1, 2[$  (**ver notas 2 e 3**) ..... 4 pontos
- Determinar o minimizante de  $f'$  no intervalo  $]1, 2[$  (1,23) ..... 8 pontos

**Notas:**

1. Se, na resposta, não for apresentado o cálculo de  $f'(x)$  nem o cálculo de  $f''(x)$ , mas for apresentado o gráfico da função  $f''$ , as duas etapas anteriores são consideradas cumpridas.
2. Se, na resposta, não for apresentado o referencial, a pontuação a atribuir a esta etapa é desvalorizada em 1 ponto.
3. Se, na resposta, não for apresentado o cálculo de  $f'(x)$ , mas for apresentado o gráfico da função  $f'$ , a etapa anterior é considerada cumprida.

**5.1. .... 5 pontos**

- Identificar a secção pretendida ..... 1 ponto
- Indicar as dimensões do retângulo ..... 2 pontos
- Obter a área pedida (6) ..... 2 pontos

**Nota** – Se apenas for apresentada a igualdade  $2 \times 3 = 6$ , a classificação a atribuir à resposta é 5 pontos.

**5.2. .... 10 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

**1.º Processo**

- Determinar as coordenadas de um vetor diretor da reta  $BC$  ..... 2 pontos
- Escrever a condição  $x = 1 \wedge \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{3}$  (ou equivalente) ..... 3 pontos
- Escrever o sistema  $\begin{cases} x = 1 \\ \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{3} \\ y = 0 \end{cases}$  ..... 3 pontos



Obter as coordenadas do ponto de intersecção  $((1, 0, 9))$  ..... 2 pontos

**2.º Processo**

Determinar as coordenadas de um vetor diretor da reta  $BC$  ..... 2 pontos

Escrever uma equação vetorial da reta  $BC$

$((x, y, z) = (1, 2, 3) + k(0, -1, 3), k \in \mathbb{R}$  ou outra equação  
vetorial equivalente) ..... 2 pontos

Escrever as coordenadas de um ponto genérico da reta  $BC$ , em função  
de  $k$  ..... 2 pontos

Obter uma equação na variável  $k$  ..... 1 ponto

Obter o valor de  $k$  ..... 1 ponto

Obter as coordenadas do ponto de intersecção da reta  $BC$  com o plano  $xOz$   
 $((1, 0, 9))$  ..... 2 pontos

**5.3. .... 15 pontos**

Indicar as coordenadas de um vetor diretor da reta  $r$  ..... 1 ponto

Obter uma equação do plano  $\alpha$  ..... 2 pontos

Obter as coordenadas do ponto  $P$  ..... 2 pontos

Determinar as coordenadas do vetor  $\vec{OP}$  ..... 1 ponto

Determinar as coordenadas do vetor  $\vec{OC}$  ..... 1 ponto

Calcular  $\vec{OP} \cdot \vec{OC}$  ..... 2 pontos

Determinar a norma do vetor  $\vec{OP}$  ..... 1 ponto

Determinar a norma do vetor  $\vec{OC}$  ..... 1 ponto

Escrever a equação  $9 = 3 \times \sqrt{14} \times \cos \widehat{POC}$  (ou equivalente) ..... 2 pontos

Obter a amplitude do ângulo  $POC$  ( $37^\circ$ ) ..... 2 pontos

**6. .... 10 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

**1.º Processo**

Escrever uma expressão que dê  $\overline{AB}$ , em função de  $\alpha$  ( $-\cos(2\alpha)$ ) ..... 2 pontos

Escrever uma expressão que dê a altura do triângulo relativa à base  $[AB]$ , em  
função de  $\alpha$  ( $\text{tg } \alpha - \text{sen}(2\alpha)$ ) ..... 2 pontos

Escrever a expressão  $\frac{-\cos(2\alpha) \operatorname{tg} \alpha \left(1 - \frac{2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha}\right)}{2}$  ..... 2 pontos

Obter a expressão  $\frac{\cos(2\alpha) \operatorname{tg} \alpha (2 \cos^2 \alpha - 1)}{2}$  ..... 2 pontos

Obter a expressão  $\frac{\cos(2\alpha) \operatorname{tg} \alpha \cos(2\alpha)}{2}$  ..... 1 ponto

Obter a expressão pretendida ..... 1 ponto

**2.º Processo**

Escrever uma expressão que dê  $\overline{AB}$ , em função de  $\alpha$  ( $-\cos(2\alpha)$ ) ..... 2 pontos

Escrever uma expressão que dê a altura do triângulo relativa à base  $[AB]$ , em função de  $\alpha$  ( $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{sen}(2\alpha)$ ) ..... 2 pontos

Escrever a expressão  $\frac{-\cos(2\alpha) \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha - 2 \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha}{\cos \alpha}\right)}{2}$  ..... 2 pontos

Obter a expressão  $\frac{\cos(2\alpha) \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} (2 \cos^2 \alpha - 1)\right)}{2}$  ..... 2 pontos

Obter a expressão  $\frac{\cos(2\alpha) \operatorname{tg} \alpha \cos(2\alpha)}{2}$  ..... 1 ponto

Obter a expressão pretendida ..... 1 ponto

**COTAÇÕES**

Grupo	Item												
	Cotação (em pontos)												
I	1. a 8.												40
	8 × 5 pontos												
II	1. 15	2.1. 15	2.2. 15	3.1. 15	3.2. 15	4.1. 15	4.2. 15	4.3. 15	5.1. 5	5.2. 10	5.3. 15	6. 10	160
<b>TOTAL</b>													<b>200</b>