EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. Dans une boulangerie industrielle, on prélève au hasard une baguette de pain dans la production. On admet que la variable aléatoire exprimant sa masse, en gramme, suit la loi normale d'espérance 200 et d'écart-type 10.

   Affirmation 1

   La probabilité que la masse de la baguette soit supérieure à 187 g est supérieure à 0,9.

2. **Affirmation 2**

   L'équation $x - \cos(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Dans les questions 3 et 4, l'espace est rapporté à un repère orthonormal, et l'on considère les droites D_1 et D_2 qui admettent pour représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = -5t' + 3 \\ y = 2t' \\ z = t' + 4 \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$$

3. **Affirmation 3**

   Les droites D_1 et D_2 sont sécantes.

4. **Affirmation 4**

   La droite D_1 est parallèle au plan P d'équation $x + 2y + z - 3 = 0$.

CORRECTION

EXERCICE 1 **4 points**

1. Dans une boulangerie industrielle, on prélève au hasard une baguette de pain dans la production. On admet que la variable aléatoire exprimant sa masse, en gramme, suit la loi normale d'espérance 200 et d'écart-type 10.

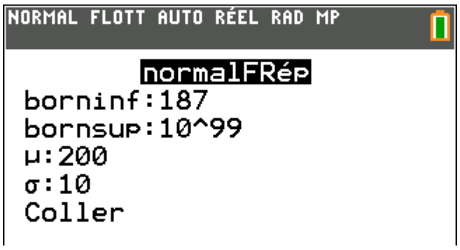
Affirmation 1

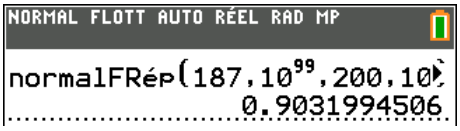
La probabilité que la masse de la baguette soit supérieure à 187 g est supérieure à 0,9.

Ainsi on cherche $p(X \geq 187)$, avec X une variable aléatoire qui suit une loi normale.
On va utiliser notre TI-83 Premium CE, on appuie sur 2nde var (distrib) puis on choisit **normalFRép(**

On complète la boite de dialogue : La moyenne est de $\mu = 200$ et l'écart type de $\sigma = 10$:
Remarque : $+\infty$ correspond à 10^{99} pour la calculatrice.

On obtient ainsi $\boldsymbol{p(X \geq 187) > 0,9}$.





Conclusion : **L'affirmation 1 est vraie.**

---

2. Affirmation 2

L'équation $\boldsymbol{x - \cos(x) = 0}$ admet une unique solution dans l'intervalle $\boldsymbol{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]}$.

Pour répondre à la question, on va étudier la fonction f définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = x - \cos(x)$

La fonction $x \mapsto x$ est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ car c'est une fonction polynôme.

La fonction $x \mapsto \cos(x)$ est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ d'après le cours.

Par différence de fonctions dérivables sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, f est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et on a :

Pour tout $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ $f'(x) = 1 + \sin(x)$.

Or pour tout $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ donc $1 + \sin(x) \geq 0$ soit $f'(x) \geq 0$.

Ce qui prouve que f est croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

De plus $f(0) = 0 - \cos 0 = -1$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

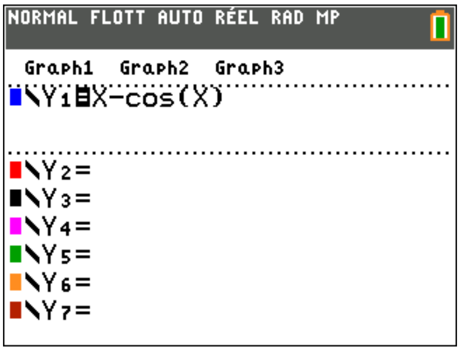
On obtient le tableau de variation suivant :

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-1 \nearrow \frac{\pi}{2}$

D'après le tableau de variation, f est strictement croissante et continue sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ à valeur dans $\left[-1;\frac{\pi}{2}\right]$. Or $0 \in \left[-1;\frac{\pi}{2}\right]$ donc d'après le théorème de la bijection (ou corollaire du théorème des valeurs intermédiaires), **il existe un unique $\alpha \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $f(\alpha) = 0$.**

Conclusion : **L'affirmation 2 est vraie**.

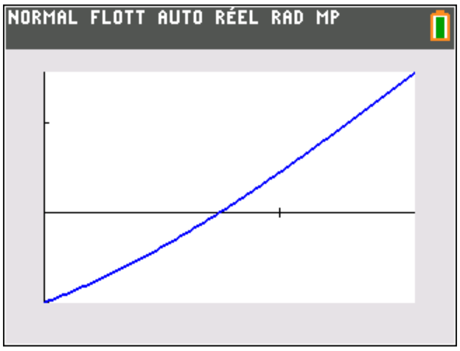
Vérifions nos résultats en représentant graphiquement la fonction f à l'aide de notre TI 83 Premium CE :



Pour entrer la fonction, on appuie sur graph stats f1 f(x) et on entre son expression : $X - \cos(X)$

Puis on précise son l'ensemble de définition $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ en appuyant sur déf table f2 fenêtre .

On choisit le zoom automatique en appuyant sur format f3 zoom puis 0:AjustZoom



Cela confirme bien que la fonction f est croissante sur son ensemble de définition et graphiquement on vérifie bien qu'il existe un unique $\alpha \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Dans les questions 3 et 4, l'espace est rapporté à un repère orthonormal, et l'on considère les droites D_1 et D_2 qui admettent pour représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ et } \begin{cases} x = -5t' + 3 \\ y = 2t' \\ z = t' + 4 \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$$

3. Affirmation 3

Les droites D_1 et D_2 sont sécantes.

Cherchons si il existe $M \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$ tel que $M \in D_1 \cap D_2$:

Si un tel point existe alors il vérifie le système suivant :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = 4t \\ x = -5t' + 3 \\ y = 2t' \\ z = t' + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = 4t \\ 1 + 2t = -5t' + 3 \\ 2 - 3t = 2t' \\ 4t = t' + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ 5L_5 + 2L_4 \\ 5L_6 + L_4 \end{array} \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = 4t \\ 1 + 2t = -5t' + 3 \\ 12 - 11t = 6 \\ 1 + 22t = 23 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = 4t \\ 1 + 2t = -5t' + 3 \\ t = \dfrac{6}{11} \\ t = 1 \end{cases}$$

Les valeurs de t ne sont pas identiques, les droites **D_1 et D_2 ne sont pas sécantes.**

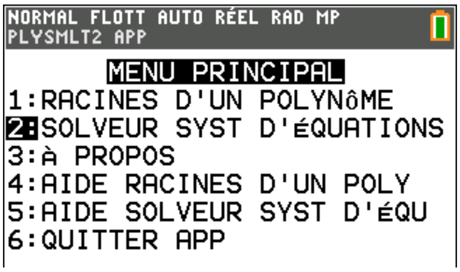
Conclusion : **L'affirmation 3 est fausse**.

Vérifions nos résultats avec notre TI 83 Premium CE :

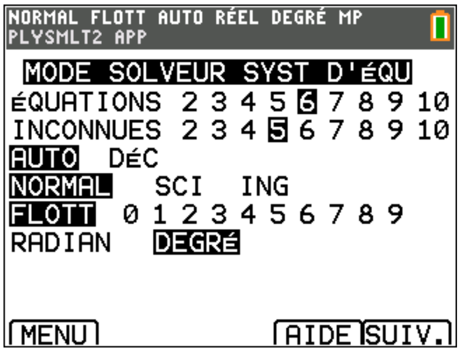
Pour résoudre un système on utilise l'application

`PlySmlt2` accessible en appuyant sur apps F résol

Puis on choisit 2:SOLVEUR SYST D'ÉQUATIONS



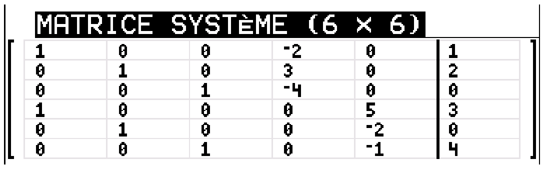
Il y a 6 équations, et les inconnues sont x, y, z et t, t' soit 5 inconnues.
On précise donc EQUATIONS 6
et INCONNUES 5
Puis on appuie sur SUIV.



Pour entrer les coefficients, il faut modifier la présentation du système :

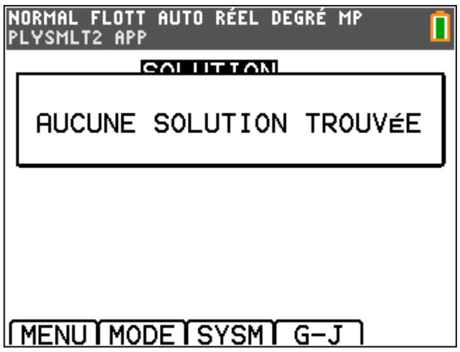
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = 4t \\ x = -5t' + 3 \\ y = 2t' \\ z = t' + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \quad - 2t \quad = 1 \\ y + 3t \quad = 2 \\ z - 4t \quad = 0 \\ x \quad + 5t' = 3 \\ y \quad - 2t' = 0 \\ z \quad - t' = 4 \end{cases}$$

Pour résoudre ce système, on appuie sur RÉSOL



$x \quad y \quad z \quad t \quad t' \quad constante$

La calculatrice confirme qu'il n'y a aucune solution.



4. *Affirmation 4*

La droite D_1 est parallèle au plan P d'équation $x+2y+z-3=0$.

$D_1 : \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-3t \\ z = 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ donc $\vec{u} \begin{vmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{vmatrix}$ est un vecteur directeur de D_1.

$P : x+2y+z-3=0$ donc $\vec{n} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}$ est un vecteur normal de P.

$\vec{u}.\vec{n} = 2 \times 1 + (-3) \times 2 + 4 \times 1 = 2 - 6 + 4 = 0$

ainsi $\vec{u} \perp \vec{n}$ ce qui prouve que $\boldsymbol{D_1 // P}$.

Conclusion : **L'affirmation 4 est vraie**.