On considère la fonction f définie sur R par $f(x) = (x+2)e^{-x}$.
On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Étude de la fonction f.

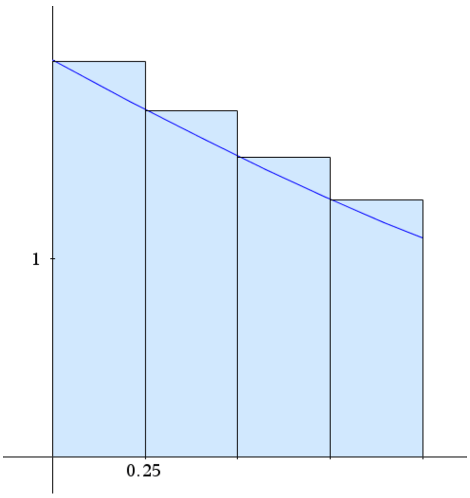
   a. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe C avec les axes du repère.

   b. Étudier les limites de la fonction f en $-\infty$et en $+\infty$. En déduire les éventuelles asymptotes de la courbe C.

   c. Étudier les variations de f sur R.

2. Calcul d'une valeur approchée de l'aire sous une courbe.
On note D le domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équation
$x = 0$ et $x = 1$. On approche l'aire du domaine D en calculant une somme d'aires de rectangles.

   a. Dans cette question, on découpe l'intervalle [0 ; 1] en quatre intervalles de même longueur :
   • Sur l'intervalle $\left[0;\frac{1}{4}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f(0)$.
   • Sur l'intervalle$\left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{1}{4}\right)$.
   • Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{1}{2}\right)$.
   • Sur l'intervalle$\left[\frac{3}{4};1\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{3}{4}\right)$.
   Cette construction est illustrée ci-contre.



L'algorithme ci-dessous permet d'obtenir une valeur approchée de l'aire du domaine D en ajoutant les aires des quatre rectangles précédents :

Variables : k est un nombre entier S est un nombre réel Initialisation : Affecter à S la valeur 0 Traitement : Pour k variant de 0 à 3   Affecter à S la valeur $S+\frac{1}{4}f\left(\frac{k}{4}\right)$ Fin Pour Sortie : Afficher S

Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du résultat affiché par cet algorithme.

b. Dans cette question, N est un nombre entier strictement supérieur à 1. On découpe l'intervalle [0 ; 1] en N intervalles de même longueur. Sur chacun de ces intervalles, on construit un rectangle en procédant de la même manière qu'à la question 2.a.
Modifier l'algorithme précédent afin qu'il affiche en sortie la somme des aires des N rectangles ainsi construits.

3. Calcul de la valeur exacte de l'aire sous une courbe.
Soit g la fonction définie sur R par $g(x) = (-x - 3)e^{-x}$.
On admet que g est une primitive de la fonction f sur$R$.

a. Calculer l'aire A du domaine D, exprimée en unités d'aire.

b. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de l'erreur commise en remplaçant A par la valeur approchée trouvée au moyen de l'algorithme de la question 2. a, c'est-à-dire l'écart entre ces deux valeurs.

CORRIGÉ

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)e^{-x}$.
On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. **Étude de la fonction f.**

a. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe C avec les axes du repère.

$A\left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right. \in C \cap (Ox) \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(0) \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = (0+2)e^0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 0 \end{cases}$. Ainsi $A\left|\begin{matrix} 0 \\ 2 \end{matrix}\right.$

$B\left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right. \in C \cap (Oy) \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)e^{-x} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \text{ car } e^{-x} > 0 \\ y = 0 \end{cases}$. Ainsi $B\left|\begin{matrix} -2 \\ 0 \end{matrix}\right.$

b. Étudier les limites de la fonction f en $-\infty$et en $+\infty$. En déduire les éventuelles asymptotes de la courbe C.

Commençons par calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

$$\left.\begin{matrix} \left.\begin{matrix} \lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \end{matrix}\right\} \text{donc par composition } \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x+2 = -\infty \end{matrix}\right\} \text{par produit } \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Pour calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ on va tout d'abord développer $f(x)$:
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = xe^{-x} + 2e^{-x}$

$$\left.\begin{matrix} \left.\begin{matrix} \lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0 \; d'après\ le\ cours \end{matrix}\right\} \text{donc par composition } \lim\limits_{x\to+\infty} -xe^{-x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = 0\ (cours) \end{matrix}\right\} \text{par somme } \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

c. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto -x$ est dérivable sur R car c'est une fonction polynômiale, donc d'après le cours la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est dérivable sur R.
La fonction $x \mapsto x+2$ est dérivable sur R car c'est une fonction polynômiale.
Par produit f est dérivable sur R, et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 1\times e^{-x} + (x+2)\times(-e^{-x}) = e^{-x}(1-x-2) = e^{-x}(-x-1)$$

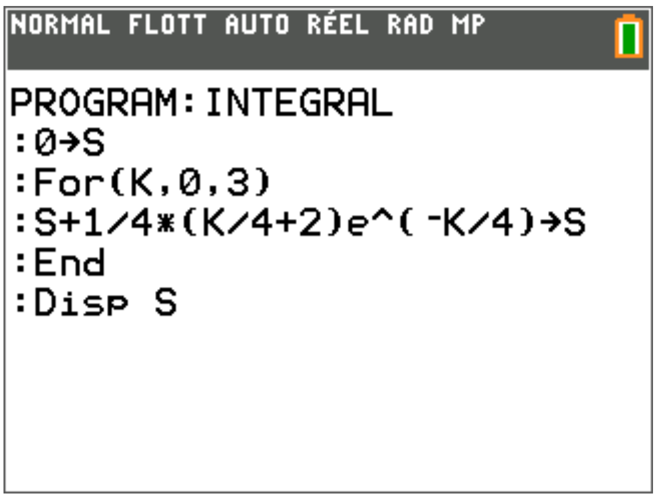
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $e^{-x} > 0$ d'après le cours, donc $f'(x)$ est du signe de $-x-1$.
Conclusion : $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty;-1[$ ainsi f est croissante sur $]-\infty;-1[$.
$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-1;+\infty[$ ainsi f est décroissante sur $]-1;+\infty[$.

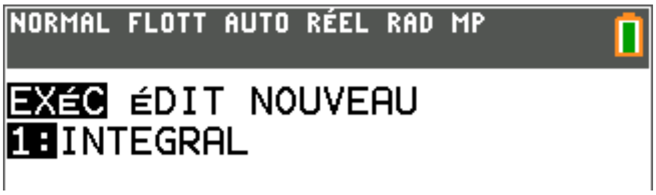
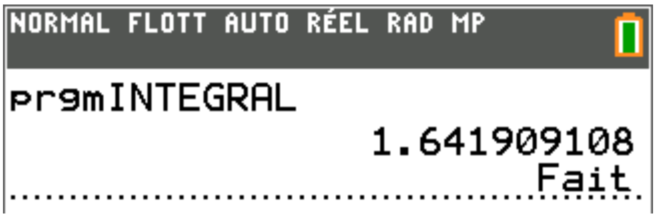
2. Calcul d'une valeur approchée de l'aire sous une courbe.

a. L'algorithme ci-dessous permet d'obtenir une valeur approchée de l'aire du domaine D en ajoutant les aires des quatre rectangles précédents :

Variables : k est un nombre entier
S est un nombre réel
Initialisation : Affecter à S la valeur 0
Traitement : Pour k variant de 0 à 3
Affecter à S la valeur
$S+\frac{1}{4}f\left(\frac{k}{4}\right)$
Fin Pour
Sortie : Afficher S

Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du résultat affiché par cet algorithme.

Programmons cet algorithme sur notre TI-83 Premium CE : Pour écrire le programme, on appuie sur prgm, puis on choisit l'onglet NOUVEAU.	
Et on entre le nom du programme, ici on a choisit SUITE.	
Puis on entre le programme :	

<table>
<tr>
<td>Pour l'exécuter on doit sortir tout d'abord de l'éditeur de programme en appuyant sur 2nde mode (quitter) puis, pour exécuter le programme on appuie sur prgm, dans l'onglet EXEC on sélectionne le nom de son programme :</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>On obtient le résultat suivant :</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>La valeur recherchée est donc 1,642 à 10^{-3} près.</td>
<td></td>
</tr>
</table>

b. Dans cette question, N est un nombre entier strictement supérieur à 1. On découpe l'intervalle [0 ; 1] en N intervalles de même longueur. Sur chacun de ces intervalles, on construit un rectangle en procédant de la même manière qu'à la question 2.a.

Modifier l'algorithme précédent afin qu'il affiche en sortie la somme des aires des N rectangles ainsi construits.

L'algorithme modifié est le suivant :

Variables : k est un nombre entier
S est un nombre réel
Initialisation : Affecter à S la valeur 0
Traitement : Pour k variant de 0 à N-1
Affecter à S la valeur $S+\frac{1}{N}f\left(\frac{k}{N}\right)$
Fin Pour
Sortie : Afficher S

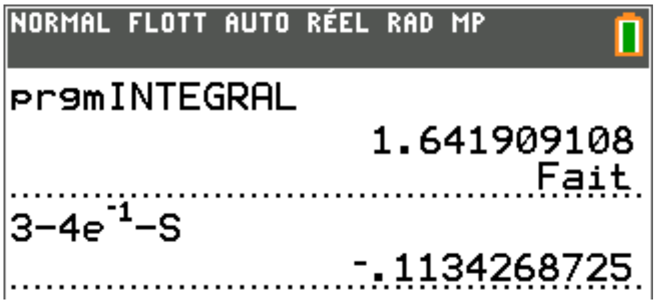
3. Calcul de la valeur exacte de l'aire sous une courbe. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (-x-3)e^{-x}$.
On admet que g est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

a. Calculer l'aire A du domaine D, exprimée en unités d'aire.

La valeur de A est :

$$\int_0^1 f(x)dx = [g(x)]_0^1 = g(1) - g(0) = (-1-3)e^{-1} - (-0-3)e^0 = 3 - 4e^{-1}\ u.a.$$

b. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de l'erreur commise en remplaçant A par la valeur approchée trouvée au moyen de l'algorithme de la question 2. a, c'est-à-dire l'écart entre ces deux valeurs.

Faisons le calcul de la différence de ces deux valeurs à l'aide de notre TI-83 Premium CE :	
L'erreur sera de 0,113 u.a. à 10^{-3} près.	