EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{1-x}}$$

Partie A

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; 1]$.
2. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$, $f(x) = \frac{e^x}{e^x+e}$ (on rappelle que $e = e^1$)
3. Montrer alors que

$$\int_0^1 f(x)dx = \ln(2) + 1 - \ln(1+e)$$

Partie B

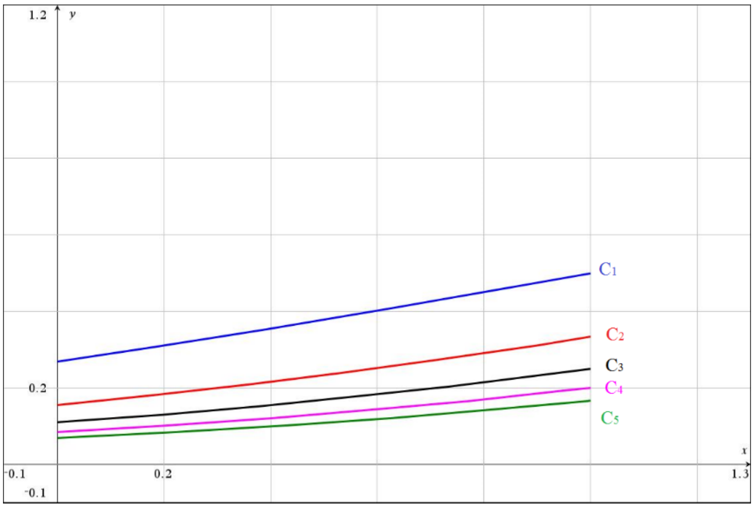
Soit n un entier naturel. On considère les fonctions f_n définies sur $[0; 1]$ par :

$$f_n(x) = \frac{1}{1+ne^{1-x}}$$

On note C_n la courbe représentative de la fonction f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé.
On considère la suite de terme général

$$u_n = \int_0^1 f_n(x)dx$$

1. On a tracé ci-dessous les courbes représentatives des fonctions f_n pour n variant de 1 à 5. Compléter le graphique en traçant la courbe C_0 représentative de la fonction f_0.



2. Soit n un entier naturel, interpréter graphiquement u_n et préciser la valeur de u_0.
3. Quelle conjecture peut-on émettre quant au sens de variation de la suite (u_n) ? Démontrer cette conjecture.
4. La suite (u_n) admet-elle une limite ?

CORRECTION

EXERCICE 3 **4 points**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;1]$ par :

$$f(x)=\frac{1}{1+e^{1-x}}$$

Partie A

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;1]$.

La fonction $x\mapsto 1-x$ est dérivable sur $[0;1]$ car c'est une fonction polynôme.
Donc d'après le cours la fonction $x\mapsto e^{1-x}$ est dérivable sur $[0;1]$
Ainsi la fonction $x\mapsto 1+e^{1-x}$ est dérivable sur $[0;1]$ et ne s'annule jamais donc f est dérivable sur $[0;1]$ et on a :
Pour tout $x\in[0;1]$, $f'(x)=-\frac{-1\times e^{1-x}}{(1+e^{1-x})^2}=\frac{e^{1-x}}{(1+e^{1-x})^2}$.
La fonction exp étant toujours strictement positive, on en déduit que f' est positive stricte.

$\boxed{\boldsymbol{f} \text{ est donc croissante sur } [\mathbf{0};\mathbf{1}].}$

---

2. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0;1]$, $f(x)=\frac{e^x}{e^x+e}$ (on rappelle que $e=e^1$)

$$\forall x\in[0;1]\,,f(x)=\frac{1}{1+e^{1-x}}=\frac{1\times e^x}{(1+e^{1-x})\times e^x}=\frac{e^x}{e^x+e^{1-x}\times e^x}=\frac{e^x}{e^x+e^{1-x+x}}=\frac{e^x}{e^x+e^1}$$

On a donc prouvé que pour tout réel x de l'intervalle $[0;1]$, $\boxed{\boldsymbol{f(x)=\frac{e^x}{e^x+e}}}$

---

3. Montrer alors que

$$\int_0^1 f(x)dx=\ln(2)+1-\ln(1+e)$$

$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{e^x}{e^x+e}dx$. On reconnait une forme du type $\frac{u'}{u}$, avec $u(x)=e^x+e$ et $u'(x)=e^x$

Ainsi $\int_0^1 f(x)dx=[\ln|e^x+e|]_0^1=\ln(e^1+e)-\ln(e^0+e)$

$$=\ln(2e)-\ln(1+e)=\ln(2)+\ln(e)-\ln(1+e)=\ln(2)+1-\ln(1+e)$$

On a donc bien $\boxed{\boldsymbol{\int_0^1 f(x)dx=\ln(2)+1-\ln(1+e)}}$

Partie B

Soit n un entier naturel. On considère les fonctions f_n définies sur $[0; 1]$ par :

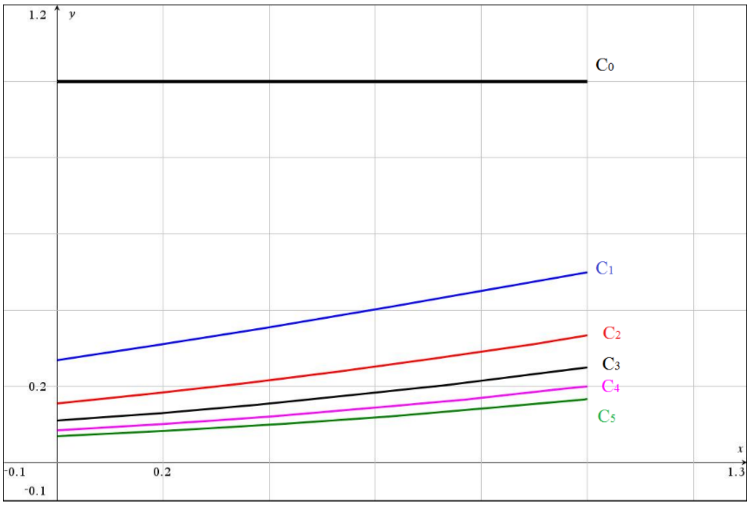
$$f_n(x) = \frac{1}{1 + ne^{1-x}}$$

On note C_n la courbe représentative de la fonction f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé.
On considère la suite de terme général

$$u_n = \int_0^1 f_n(x)dx$$

1. On a tracé ci-dessous les courbes représentatives des fonctions f_n pour n variant de 1 à 5. Compléter le graphique en traçant la courbe C_0 représentative de la fonction f_0.

Pour tout $x \in [0; 1]$ on a $f_0(x) = \frac{1}{1+0\times e^{1-x}} = 1$, on en déduit la représentation graphique :



2. Soit n un entier naturel, interpréter graphiquement u_n et préciser la valeur de u_0.

On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \int_0^1 f_n(x)dx$

Donc u_n est l'aire de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe C_n et le droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

3. Quelle conjecture peut-on émettre quant au sens de variation de la suite (u_n) ? Démontrer cette conjecture.

On peut conjecturer que la suite (u_n) est décroissante. Démontrons le :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 f_{n+1}(x)dx - \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \big(f_{n+1}(x) - f_n(x)\big)dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+(n+1)e^{1-x}} - \frac{1}{1+ne^{1-x}}\right)dx = \int_0^1 \left(\frac{1+ne^{1-x} - (1+(n+1)e^{1-x})}{(1+(n+1)e^{1-x})(1+ne^{1-x})}\right)dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{-e^{1-x}}{(1+(n+1)e^{1-x})(1+ne^{1-x})}\right)dx$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0;1]$ on a $(1+(n+1)e^{1-x})(1+ne^{1-x}) > 0$ et $-e^{1-x} < 0$.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0;1]$ $\frac{-e^{1-x}}{(1+(n+1)e^{1-x})(1+ne^{1-x})} \leq 0$
D'où d'après le cours, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^1 \left(\frac{-e^{1-x}}{(1+(n+1)e^{1-x})(1+ne^{1-x})}\right)dx \leq 0 \text{ soit } u_{n+1} - u_n \leq 0$$

Ce qui prouve que $\forall n \in \mathbb{N}\ \ u_{n+1} \leq u_n$. **La suite (u_n) est bien décroissante**.

---

4. La suite (u_n) admet-elle une limite ?

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0;1]$ on a $\frac{1}{1+ne^{1-x}} \geq 0$ donc

$$\int_0^1 f_n(x)dx \geq 0 \Leftrightarrow u_n \geq 0$$

La suite (u_n) est donc minorée par 0. De plus d'après 3. elle est décroissante, donc d'après le théorème de convergence monotone, **(u_n) converge**.